

2.8.20 Déterminer la valeur à attribuer au nombre réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{1 - mx}$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

$$y' = \left((1 - mx)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}(1 - mx)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-m) = \frac{-m}{3\sqrt[3]{(1 - mx)^2}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{-m}{3\sqrt[3]{(1 - mx)^2}}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 3\sqrt[3]{(1 - mx)^2} = -m$$

$$3\sqrt[3]{(1 - mx)^2} = -2m$$

$$3\sqrt[3]{(1 - mx)^2} = -2m$$

$$-\frac{3}{2} = m$$

2.8.22 Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?

$$f'(x) = \left(x^3 + ax^2 + bx \right)' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(-1) = -1 = 3 - 2a + b$$

$$-2 = -2a + b$$

$$y = -1 + 4 \implies y = 3$$

$$f(-1) = 3 = -1 + a - b$$

$$4 = a - b$$

$$\begin{array}{r} -2 = -2a + b \\ 4 = a - b \\ \hline 2 = -a \end{array}$$

$$a = -2$$

$$4 = -2 - b$$

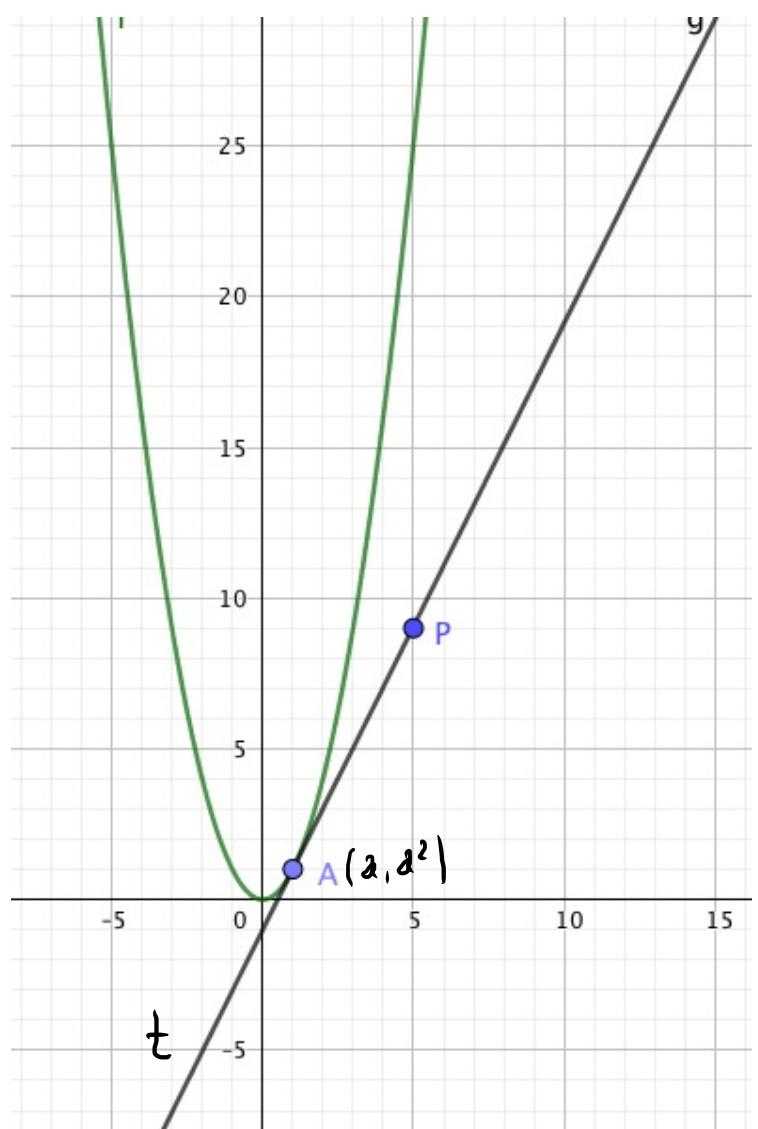
$$6 = -b$$

$$b = -6$$

2.8.23 Déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P :

a) $f(x) = x^2$, $P(5; 9)$

b) $f(x) = x^3$, $P(0; -2)$



Soit A le point de contact
de la tangente issue de P .

Donc $A(a, a^2)$, $a \in \mathbb{R}$

L'équation de la tangente au point A :

$$(t): y = mx + h$$

$$y = 2ax + h$$

t passe par A : $a^2 = 2a \cdot a + h$

On trouve $\boxed{h = -a^2}$

La tangente s'écrit (t) : $y = 2ax - a^2$

t passe par P : $y = 2x + 5 - x^2$

Résolvons cette équation : $x^2 - 10x + 9 = 0$

$$(x - 9)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ et } x = 1$$

On obtient les deux tangentes :

$$y = 18x - 81$$

$$y = 2x - 1$$

2.8.25 Calculer l'angle formé par les courbes en leurs points d'intersection :

a) $y = x^2$ et $y = x^3$,

Point d'intersection $x^2 = x^3$
 $x^3 - x^2 = 0$
 $x^2(x - 1) = 0$

Deux points d'intersection : $T_1(0,0)$ et $T_2(1,1)$

Tangentes : (C_1) : $y = x^2$, $y' = 2x$
 (C_2) : $y = x^3$, $y' = 3x^2$

T_1 : à C_1 (t_1): $y = m_1x + b_1 \Rightarrow y = 0$
à C_2 (t_2): $y = m_2x + b_2 \Rightarrow y = 0$

L'angle entre ces deux tangentes vaut 0°

T_2 : à C_1 (t_3): $y = 2x - 1$
à C_2 (t_4): $y = 3x - 2$

Soit φ l'angle entre t_3 et t_4 .

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_{t_3} - m_{t_4}}{1 + m_{t_3} \cdot m_{t_4}} \right| = \left| \frac{2 - 3}{1 + 2 \cdot 3} \right| = \frac{1}{7}$$

$$\varphi \cong 8,13^\circ$$