

2.4.9 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0.
- Prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

$$v_n = \frac{2}{2n - 1} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad u_n = v_n, \quad n \geq 1$$

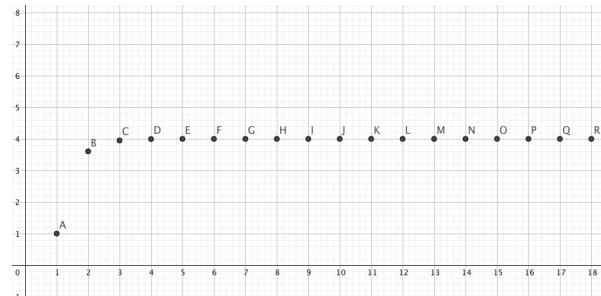
En effet $v_1 = \frac{2}{2 - 1} = 2 = u_1$

Supposons $u_n = v_n \Rightarrow u_{n+1} = v_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{\frac{2}{2n - 1}}{\frac{2}{2n - 1} + 1} = \frac{\frac{2}{2n - 1}}{\frac{2 + 2n - 1}{2n - 1}} \\ &= \frac{2}{2n + 1} = v_{n+1} \end{aligned}$$

2.4.10 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

- Montrer que $u_n < 4$, pour tout $n \geq 1$.
- Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n)$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- Prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.



Il semble que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4$$

a) Démontre que $u_n < 4$, pour $n \geq 1$

- $u_1 = 1 < 4$

- Supposons $u_n < 4$ et démontre que $u_{n+1} < 4$

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} < \sqrt{12 + 4} = 4$$

b) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n)$

$$u_{n+1}^2 = 12 + u_n$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 12 + u_n - u_n^2$$

$$(4 - u_n)(3 + u_n) = 12 + u_n - u_n^2$$

Donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n)$

c) Démontre que (u_n) est croissante.

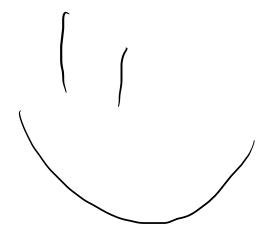
Comme $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n) > 0$

Donc $u_{n+1}^2 > u_n^2$, comme $u_n > 0$, $u_{n+1} > u_n$

Comme (u_n) est croissante et bornée, elle est convergente. Calculons sa limite

Poisson

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$



$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}}_{\text{red wavy brace}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{12 + u_n}$$

$$l = \sqrt{12 + l} \quad | \quad l^2, \quad l \geq 1$$

$$l^2 = 12 + l$$

$$l^2 - l - 12 = 0$$

$$(l-4)(l+3)$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ l=4 & l=-3 \end{array} \quad \text{ne convenient pair}$$

2.4.11 Calculer :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{4n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1}{1-n} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 3^{n-1}}{2 + 3^n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{2n + n^2 - n^3}{n-1} \right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{4n} \stackrel{\text{ind}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2n - \frac{3}{n} \right)}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(2n - \frac{3}{n} \right) = \infty$$

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1}{1-n} \right) \stackrel{\text{ind}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{-n+1} \stackrel{\text{ind}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cancel{n}(-1 + \frac{1}{n})} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 3^{n-1}}{3^n + 2} \stackrel{\text{ind}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3}^{n-1} (3 - 1)}{\cancel{3}^{n-1} \left(3 + \frac{2}{3^{n-1}} \right)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \stackrel{\text{ind}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \stackrel{\text{ind}}{=} ?$$

$$\downarrow = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{2n + n^2 - n^3}{n-1} \right)$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{-n^3 + n^2 + 2n}{n-1} \right) \text{ ind}$$

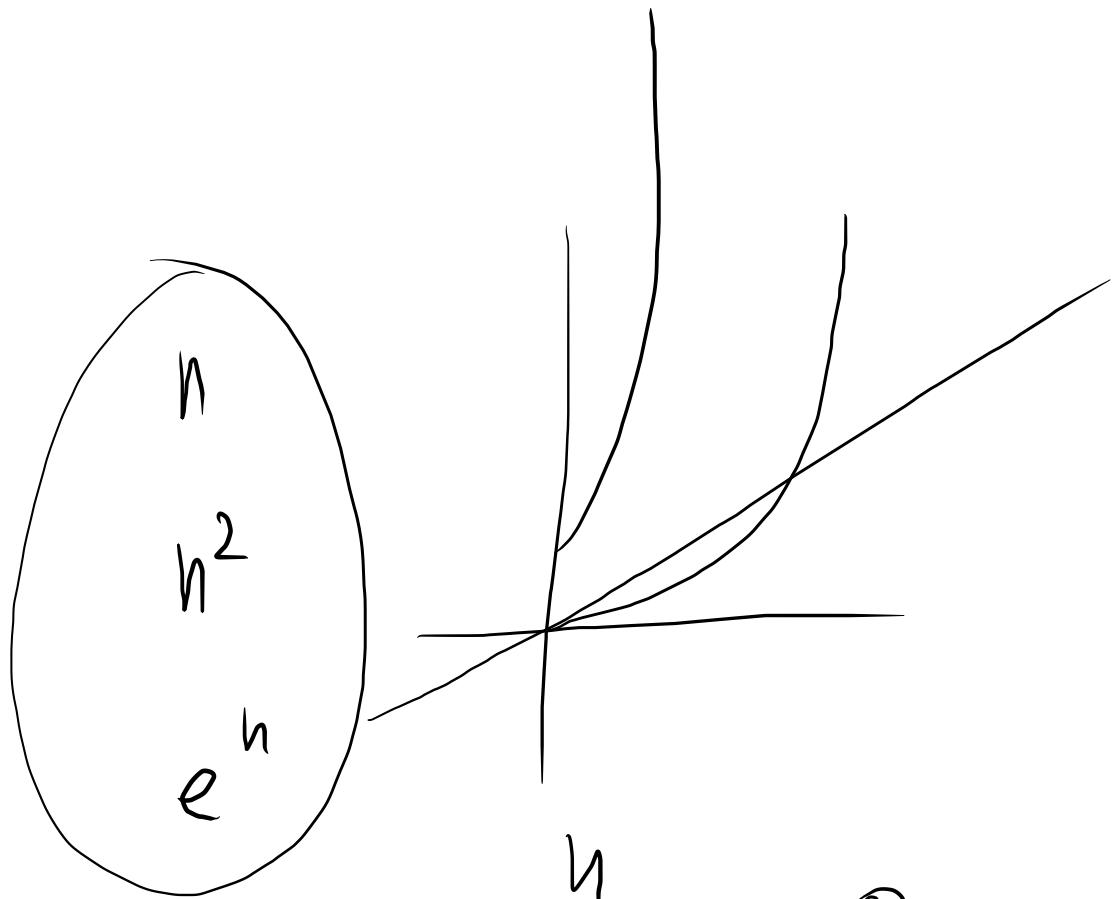
"∞ - ∞"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n-1) - n^3 + n^2 + 2n}{n-1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n \left(1 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (n-1) + \dots + 2 + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$



$$n^3 - n^2$$

$$\frac{n}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{e^n}{n^{1000}} \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}
 & n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\
 & + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\
 \hline
 & (n+1) + (n+1) \\
 & \qquad \qquad \qquad + (n+1)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) +$$