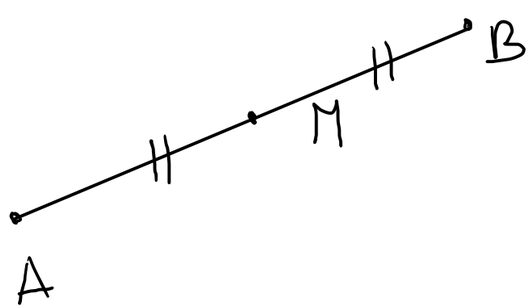
06.05.20

3.1.21 Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice d'un segment $[AB]$ si l'on donne $A(2;-3)$ et $B(-5;-2)$.

$M\left(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\right)$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(m): \quad -7x + y + c = 0$$

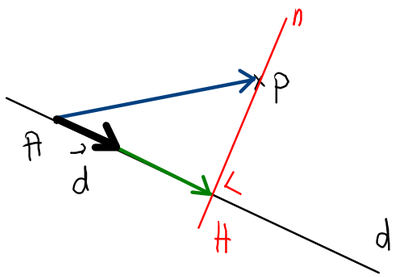
$$M \in m: \quad -7 \cdot \frac{-3}{2} + \frac{-5}{2} = -c$$

$$+8 = -c \quad \Rightarrow \quad c = -8$$

$$(m): \quad -7x + y - 8 = 0$$

$$7x - y + 8 = 0$$

3.1.18 Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-6;4)$ sur la droite d d'équation $4x = 5y - 3$.



$(d): \; 4x - 5y + 3 = 0$

① $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\vec{d} \cdot \overrightarrow{AP}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$

② intersection de la perpendiculaire à d par P avec d.

① $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

A qcq sur d : $A(3;3)$; $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{d} \cdot \overrightarrow{AP} = 5 \cdot (-9) + 4 \cdot 1 = -41$

$\|\vec{d}\| = \sqrt{41}$

$\Big\} \; \overrightarrow{AH} = \underbrace{\dfrac{-41}{41}}_{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad H(-2;-1)$

② $(d): \; 4x - 5y + 3 = 0$

$(n): \; 5x + 4y + c = 0$ $\qquad P \in n : \; 5 \cdot (-6) + 4 \cdot 4 + c = 0$

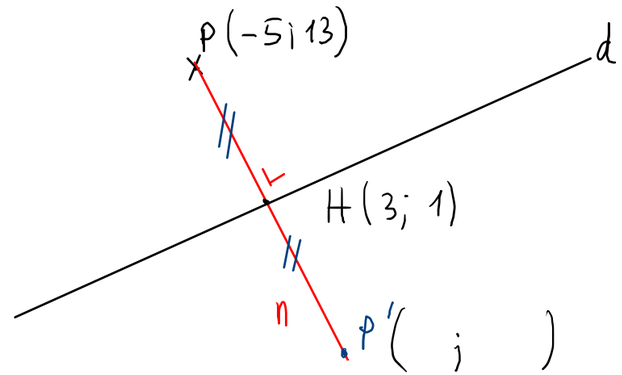
$-30 + 16 = -c \Rightarrow c = 14$

$d \cap n$ $\quad \begin{cases} 4x - 5y = -3 \\ 5x + 4y = -14 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} y & x \\ \cdot 4 & \cdot 5 \\ \cdot 5 & \cdot(-4) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 41x = -12 - 70 \\ -41y = -15 + 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

$H(-2;-1)$

3.1.19 Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(-5;13)$ relativement à la droite $d : 3y + 3 = 2x$.

Symétrie axiale :



$(d) : 2x - 3y - 3 = 0$

① $n \perp d$: $(n) \quad 3x + 2y + c = 0$

$P \in n$: $3 \cdot (-5) + 2 \cdot 13 + c = 0$

$c = -11$

$\Big\}\ (n) : 3x + 2y - 11 = 0$

② $(d) : \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ (n) : 3x + 2y = 11 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} x & y \\ \cdot 3 & \cdot 2 \\ \cdot(-2) & \cdot 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -13y = -13 \\ 13x = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

$H(3; 1)$ milieu de PP'

③ P' symétrique $P'(p_1; p_2)$:

$\frac{p_1 + (-5)}{2} = 3$, $p_1 = 6 + 5 \Rightarrow p_1 = 11$

$\frac{p_2 + 13}{2} = 1$, $p_2 = 2 - 13 \Rightarrow p = -11$

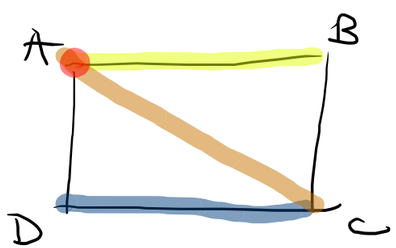
$P'(11; -11)$

3.1.23 On donne les équations de deux côtés et d'une diagonale d'un rectangle : $x = 2y$, $2y - x = 15$ et $7x + y = 15$. Calculer les coordonnées de ses sommets.

$(AB) : x - 2y = 0$

$(DC) : x - 2y - 15 = 0$

$(AC) : 7x + y - 15 = 0$



3.1.27 Deux droites d_1 et d_2 sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles ou confondues et, selon les cas, leur point commun ou leur pente commune :

a) $d_1 : 3x - 5y + 7 = 0$ $\qquad$ $d_2 : 2x - 4y - 8 = 0$

b) $d_1 : -4x + 20y + 36 = 0$ $\qquad$ $d_2 : x - 5y = 9$

c) $d_1 : -7x - 8y + 2 = 0$ $\qquad$ $d_2 : 4x - 3y + 4 = 0$

d) $d_1 : 8x - 2y + 36 = 0$ $\qquad$ $d_2 : y = 4x + 25$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

a) $m_{d_1} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$, $m_{d_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, $m_{d_1} \neq m_{d_2} \Rightarrow d_1$ coupe d_2

$$\begin{cases} (d_1) : 3x - 5y = -7 \\ (d_1) : 2x - 4y = 8 \end{cases}$$

déterminant du système $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-10)$
$= -2$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{28 + 40}{-2} = \frac{68}{-2} = -34$$

$I(-34, -19)$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{24 + 14}{-2} = -19$$

b)

$(d_1) : 4x - 20y - 36 = 0$

$(d_2) : x - 5y - 9 = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -20 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 20 = 0$$

$\Rightarrow d_1 // d_2$

Comme $(d_1) : x - 5y - 9 = 0$ $\qquad$ $\Rightarrow d_1 \equiv d_2$

$\frac{4}{1} = \frac{-20}{-5} = \frac{-36}{-9}$ $\qquad$ les droites sont confondues

c) et d)

Droites parallèles ou confondues

$(d_1) : \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad (a_1, b_1) \neq (0;0)$

$(d_2) : \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \qquad (a_2, b_2) \neq (0,0)$

1°) $b_1, b_2 \neq 0$

$$d_1 // d_2 \iff m_1 = m_2 \iff \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\iff a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

2°) $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$

$$d_1 // d_2 \iff \Delta = 0 \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

3°) d_1, d_2 confondues $\quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

4°) d_1, d_2 strictement parallèles $\quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$