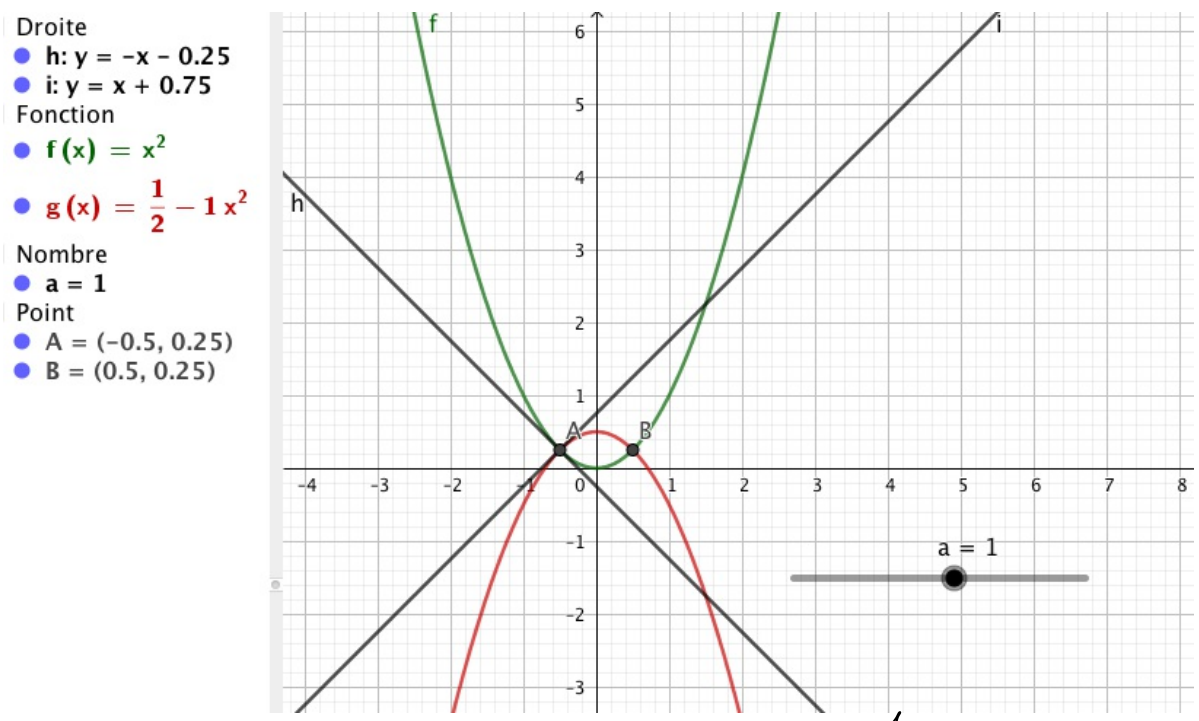
11.03.20

2.8.28 Quelle valeur faut-il donner au réel a pour que les graphes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2} - ax^2$ se coupent à angle droit.

Deux droites se coupent à angle droit si et seulement si le produit de leur pente -1.

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$g(x) = \frac{1}{2} - ax^2$, $g'(x) = -2ax$



$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) \cdot g'(x) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2(a+1)} \\ -4ax^2 = -1 \end{cases} \qquad \frac{-\cancel{4}a}{\cancel{2}(a+1)} = -1$$

$$-2a = -a - 1$$

$$a = 1$$

2.8.29 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27}$ sur l'intervalle $[0; 3]$.
Montrer qu'il existe un point du graphe de f où la pente de la tangente est égale à 1.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27} \qquad ED(f) = [0 : 3]$$

$$f'(x) = \left((x^3 - 27)^{1/3}\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}(x^3 - 27)^{-2/3} \cdot \cancel{3}x^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 27}^{\,2}} \cdot x^2 = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 27}}\right)^2$$

$$f'(x) = 1 = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 27}}\right)^2$$

$$-1 = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 27}}$$

$$-\sqrt[3]{x^3 - 27} = x$$

$$\sqrt[3]{x^3 - 27} = -x$$

$$x^3 - 27 = -x^3$$

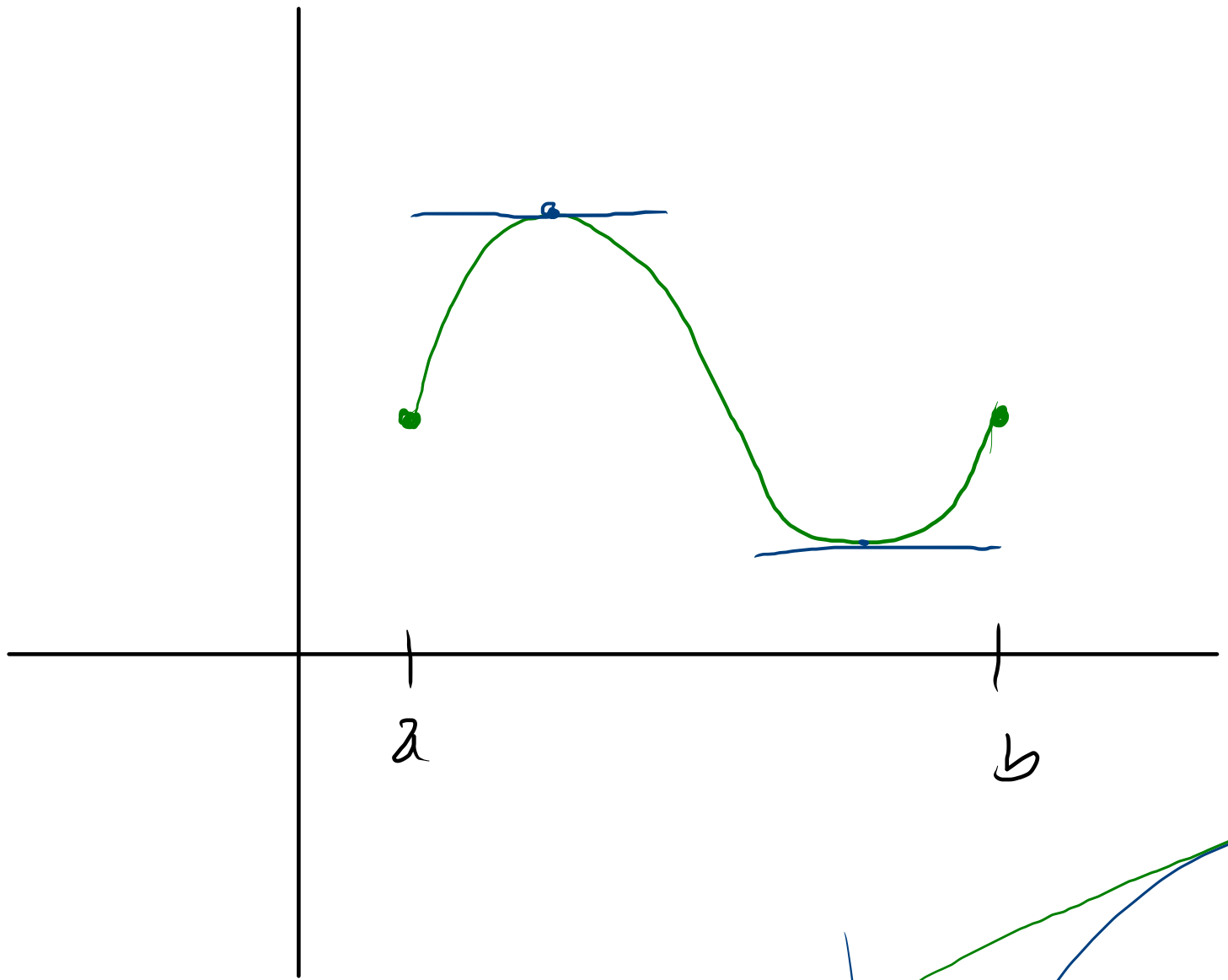
$$2x^3 - 27 = 0$$

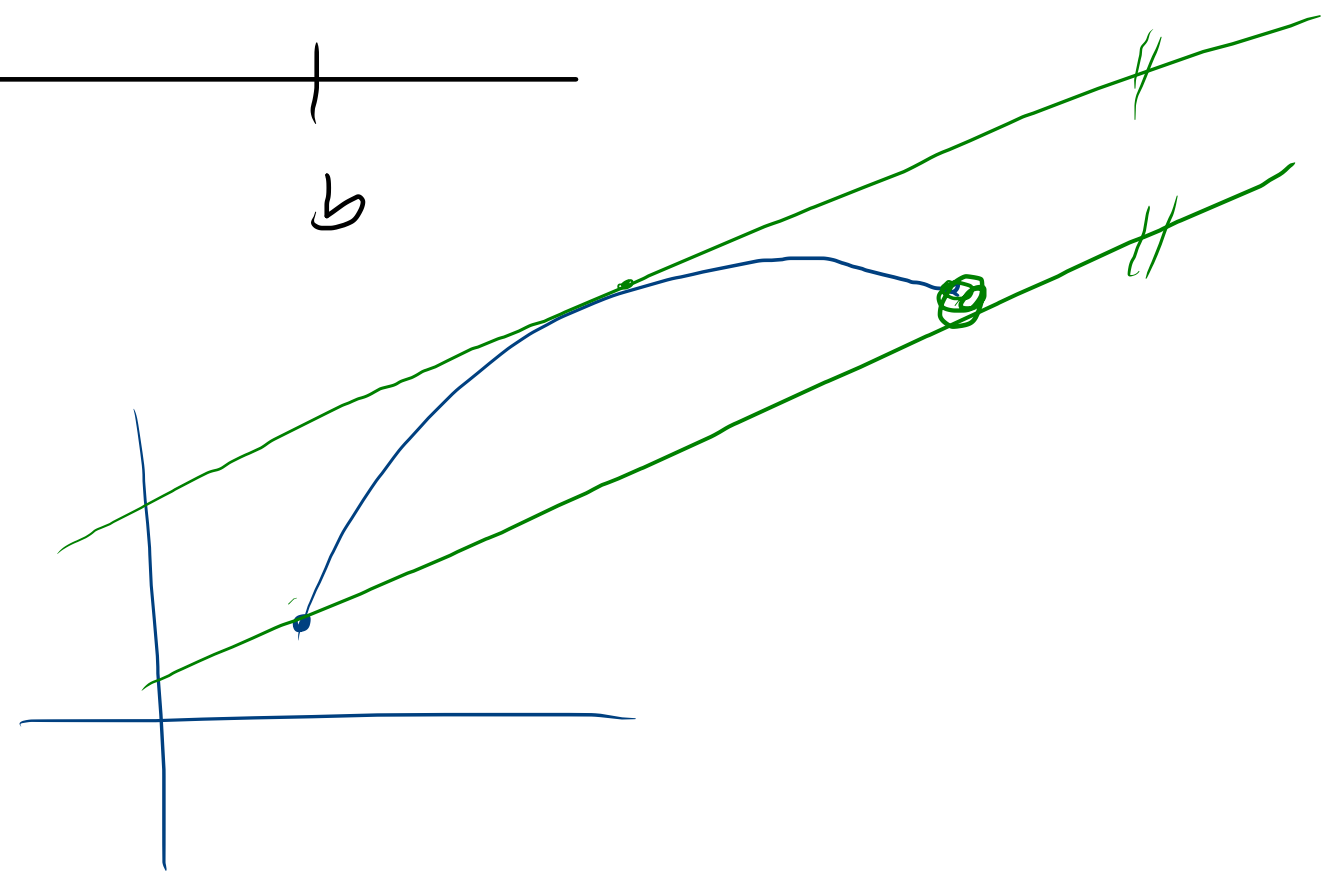
$$2x^3 = 27$$

$$x^3 = \frac{27}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} < 3$$

$$0 <$$


a
b



2.9 Applications de la dérivée

2.9.1 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x-\sin(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)-\pi/2}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(2\arctan(x)-\pi)$

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{ind}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+4x+1}{2x-3} = \frac{1}{-3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2+2x+1)}{\cancel{x}(x-3)} = \frac{1}{-3}$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{x^2} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{ind}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(3x)\cdot 3}{2x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{ind}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(3x)\cdot 9}{2} = -\frac{9}{2}$$

Regle de Bernouilli - L'Hospital (BH)

Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, telles que $f(a) = g(a) = 0$ et si $g'(a) \neq 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2} \overset{BH}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 3} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}$

$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{1} = -\frac{2}{3}$

e)

c)

Croissance

a) $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

zéros de la dérivée : $3x^2 - 3 = 0 \quad | \div 3$

$x^2 - 1 = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$

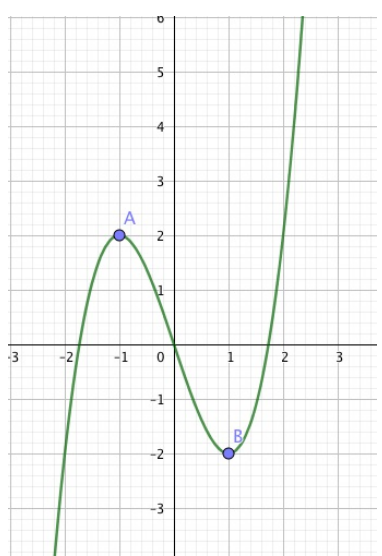
Tableau des signes de la dérivée

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Tableau de la croissance

Deux extrema : $A(-1;\ 2)$ maximum

$B(1;\ -2)$ minimum



$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
	$\nearrow$	pi	$\nearrow$