

3.3.17 Calculer la valeur de l'angle¹ aigu formé par la droite $3x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ (x - 2)^2 + (3x - 1)^2 = 5 \end{cases}$$

Résolvons la deuxième équation

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5 \end{cases}$$

$$10x^2 - 10x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 1$$

$$(y_1 = -1 \quad ; \quad y_2 = 2)$$

Déterminons la tangente au cercle au point $T(1; 2)$

$$(t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = R^2$$

$$(1 - 2)(x - 2) + (2 - 0)(y - 0) = 5$$

$$(t) - x + 2y - 3 = 0$$

Déterminons l'angle entre la tangente et la droite.

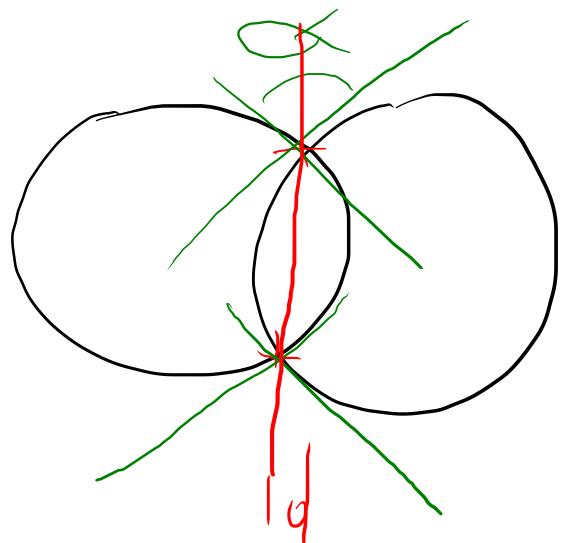
$$m_1 = 3$$

$$m_2 = 1/2$$

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{3 - 1/2}{1 + 3 \cdot 1/2} \right| = 1$$

$$\arctan(1) = 45^\circ$$

3.3.18 Calculer l'angle² sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ et $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.



$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 \end{array} \right\} L_1 - L_2$$

(d): $\left. \begin{array}{l} -2x - 6y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -3y - 2 \\ (-3y - 2)^2 + y^2 - 4(-3y - 2) + 4y + 6 = 0 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} ②: 9y^2 + 12y + 4 + y^2 + 12y + 8 + 4y + 6 &= 0 \\ 10y^2 + \cancel{28y} + \cancel{18} &= 0 \\ 5y^2 + 14y + 9 &= 0 \quad y_1 = -1 \\ (5y + 9)(y + 1) &= 0 \quad y_2 = -9/5 \end{aligned}$$

$$x_1 = -3 \cdot (-1) - 2 = 1$$

$$x_2 = -3(-9/5) - 2 = 17/5$$

$$\{(1; -1)$$

$T_1:$

$$J_1: (\underline{x}-3)(x-3) + (\underline{y}-1)(y-1) = 8$$

$$J_2: (\underline{x}-2)(x-2) + (\underline{y}+2)(y+2) = 2$$

$$| (1, -1)$$

$$\bar{T}_1 \quad (-2)(x-3) + (-2)(y-1) = 8$$

$$\bar{T}_2 \quad (-1)(x-2) + (1)(y+2) = 2$$

$$\bar{T}_1 \quad -2x + 6 - 2y + 2 - 8 = 0$$

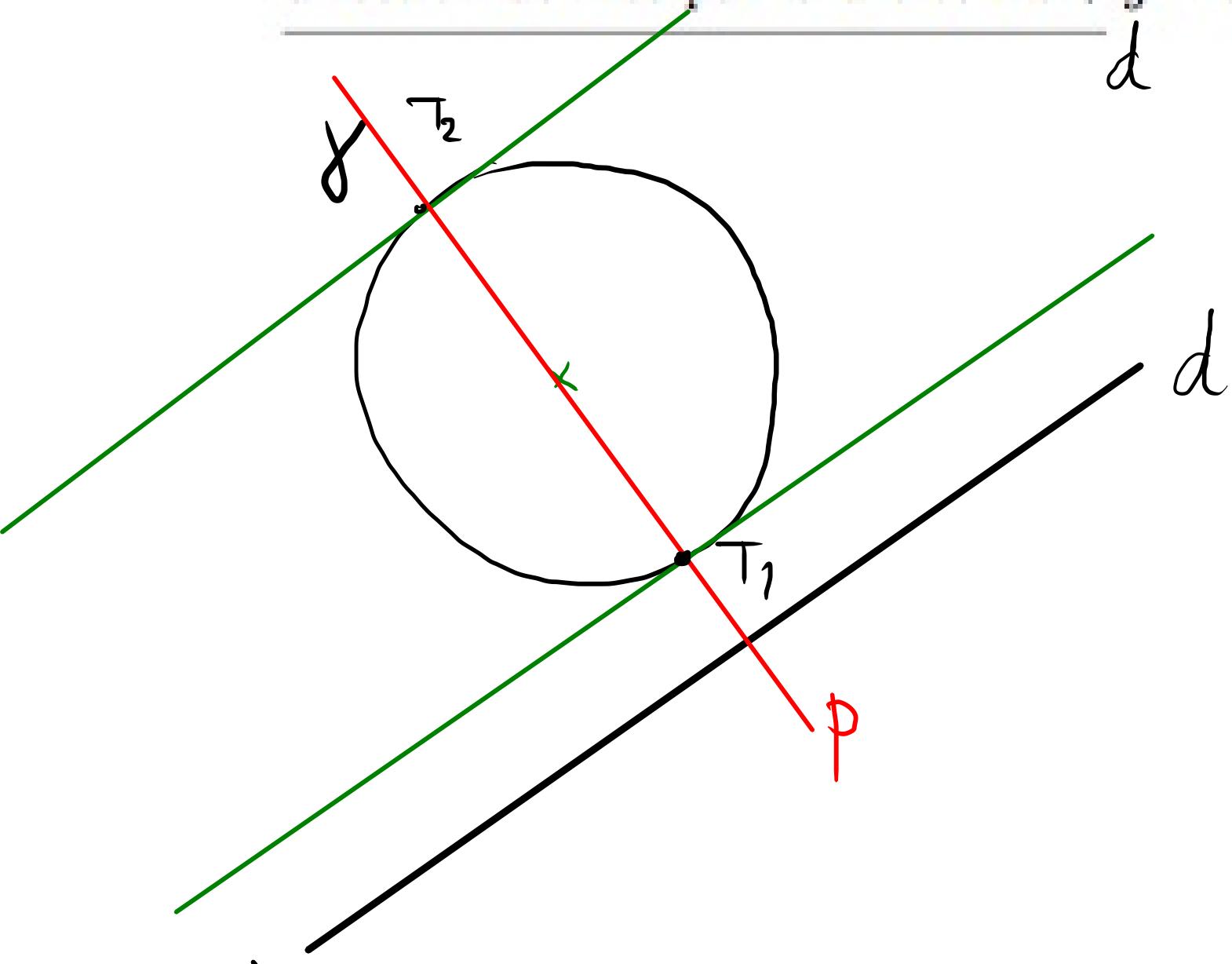
$$\bar{T}_2 \quad -x + 2 + y + 2 - 2 = 0$$

$$\bar{T}_1 \quad -2x - 2y = 0 \quad \rightarrow m_1 = -1$$

$$\bar{T}_2 \quad -x + y + 2 = 0 \quad \rightarrow m_2 = 1$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \perp$$

3.3.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, de direction donnée par la droite $2x + y = 7$.



$$m_d = -2$$

$$C(-5, 1)$$

$$R = 2\sqrt{5}$$

1^{ère} méthode

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 25 + 1$$

$$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20$$

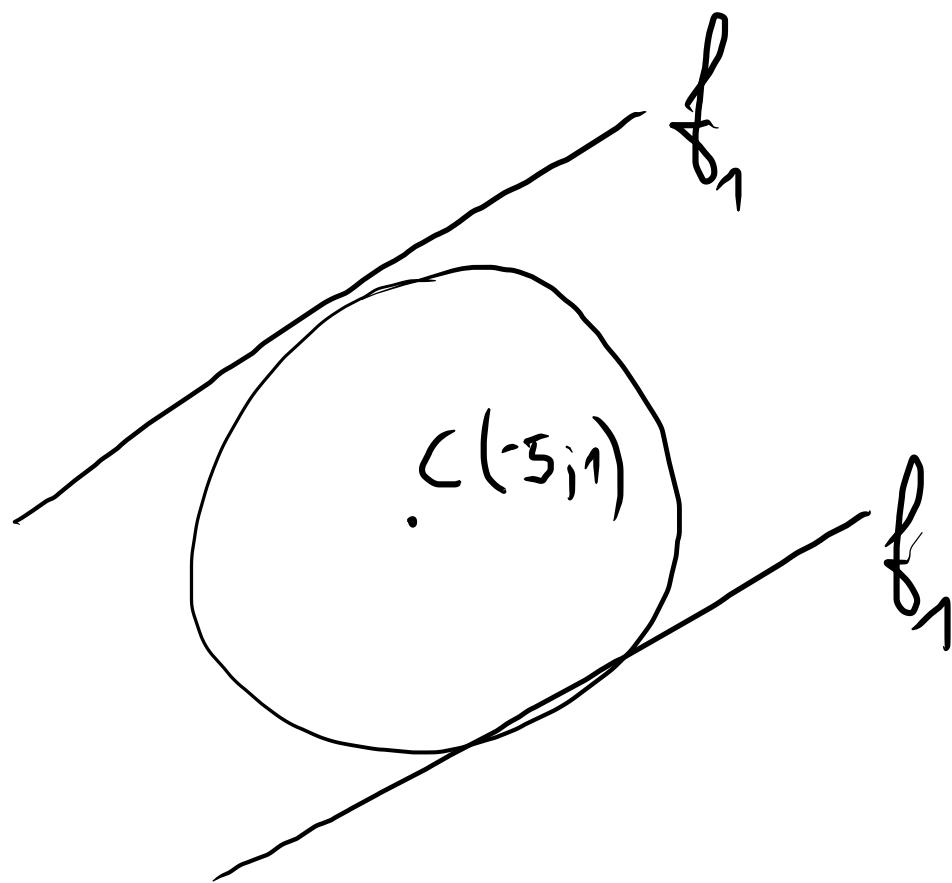
$$(P): \quad x - 2y + c = 0$$

$$m_p = \frac{1}{2}$$

$$(P): \quad x - 2y + 7 = 0$$

On détermine T_1 et T_2 :

2^{eme} methode



$$(f_1): 2x + y + e = 0$$

$$\delta(c; f) = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{|2 \cdot (-5) + 1 + e|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

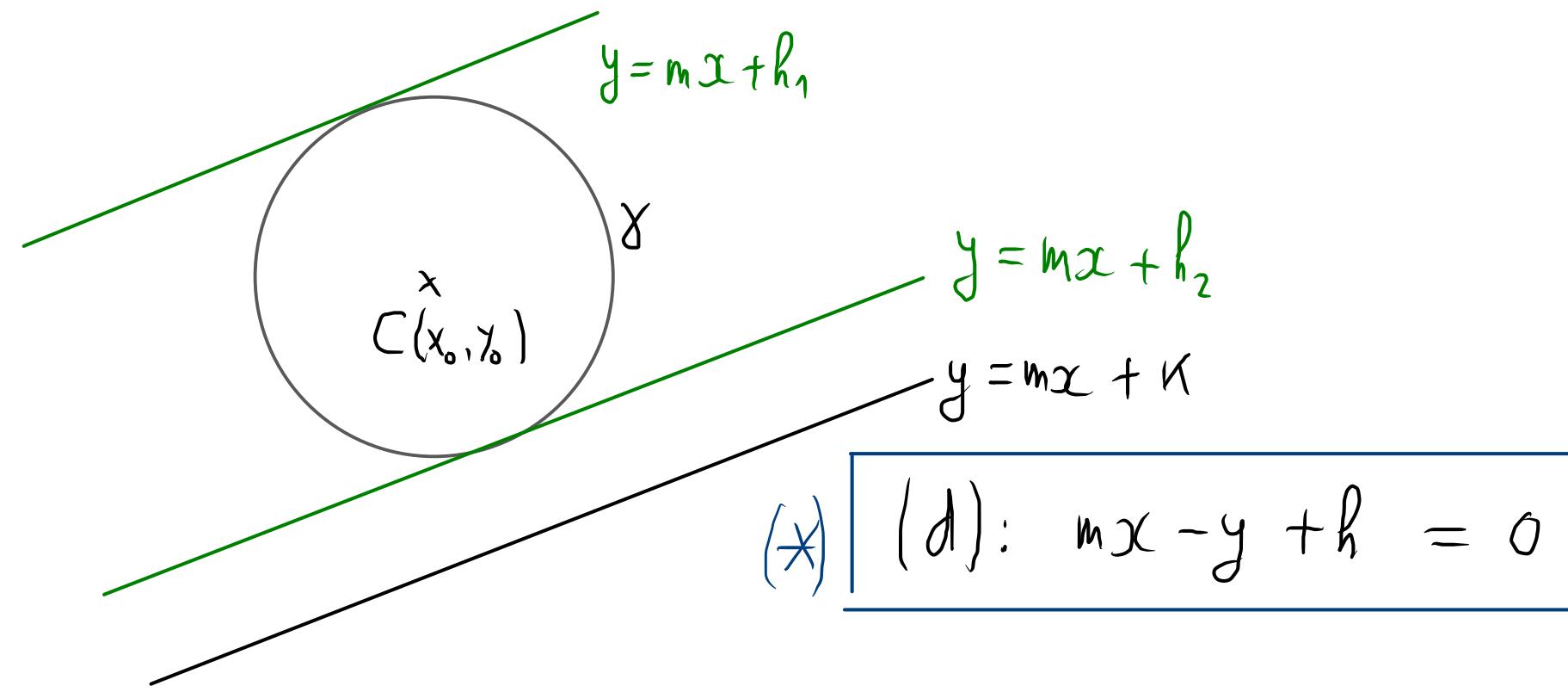
$$|-9 + e| = 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e = -1 \\ e = 19 \end{cases}$$

3.3.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2y + 345$.

idem 3.3.19 avec les tangentes au cercles de
pente -2

$$(f) : 2x + y + c = 0$$

Tangentes à un cercle de pente m donnée



Y cercle de centre $C(x_0, y_0)$ de rayon r .

Si d est une tangente de pente m cherchée, alors

$$S(c; d) = \frac{|m \cdot x_0 - y_0 + h|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

$$|m x_0 - y_0 + h| = r \sqrt{m^2 + 1}$$

$$m x_0 - y_0 + h = \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

$$h = y_0 - m x_0 \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

En substituant h dans (*)

$$y = mx + y_0 - mx_0 \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

$$(d): y - y_0 = m(x - x_0) \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

3.3.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1; 6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

$$(8): \begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 19 + 1 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 20 \end{aligned}$$

$C(-1, 0)$ et $r = 2\sqrt{5}$

Avec les tangentes de pente m :

$$y - 6 = m(x + 1) \pm 2\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$(t): y - mx = m \pm 2\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad A \in t$$

$$\begin{aligned} 6 - m &= m \pm 2\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \\ 6 - 2m &= \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2 + 1} \quad | \quad ()^2 \end{aligned}$$

$$36 - 24m + 4m^2 = 20(m^2 + 1)$$

$$16m^2 + 24m - 16 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$(2m - 1)(m + 2) = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -2$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + b_1 \\ y = -2x + b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \\ 6 = -2 + 8 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \\ y &= -2x + 8 \end{aligned}}$$

Ainsi : $\begin{cases} t_1: x - 2y + 11 = 0 \\ t_2: 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$

- Conique
 - c: $(x + 1)^2 + y^2 = 20$
- Droite
 - f: $x - 2y = -11$
 - g: $2x + y = 8$
- Point
 - A = (1, 6)
 - C = (-1, 0)

