12.12.19

Suite géométrique

$$U_n = U_0 \, q^n \quad , \quad q \in \mathbb{R} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} U_0 \, q^n = U_0 \lim_{n \to \infty} q^n$$

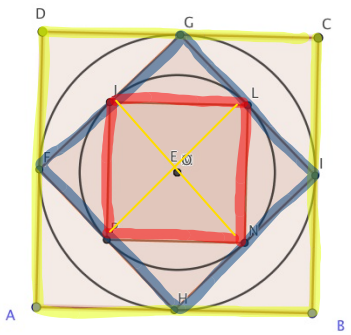
$$U_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Si $0 < q < 1$, alors U_n converge $U_n \to 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n \qquad 0 < q < 1$$

$q = \frac{1}{2}$, $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + \frac{1}{2}$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

2.4.13 Dans un carré dont le côté vaut 1, on inscrit un cercle, dans le cercle un carré, et on répète l'opération. Calculer la somme des aires des carrés.



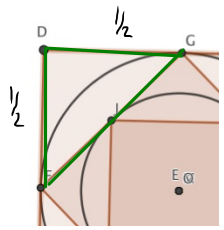
A_n est l'aire du carré à l'étape n

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{4}$$

$$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = c^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculons la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = 1 + \cancel{q} + \dots + \cancel{q^n}$$

$$-\left(\quad q S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = \cancel{q} + \quad + \cancel{q^n} + q^{n+1}\right.$$

$$q S_n - S_n = \qquad = q^{n+1} - 1$$

$$S_n (q-1) = q^{n+1} - 1$$

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

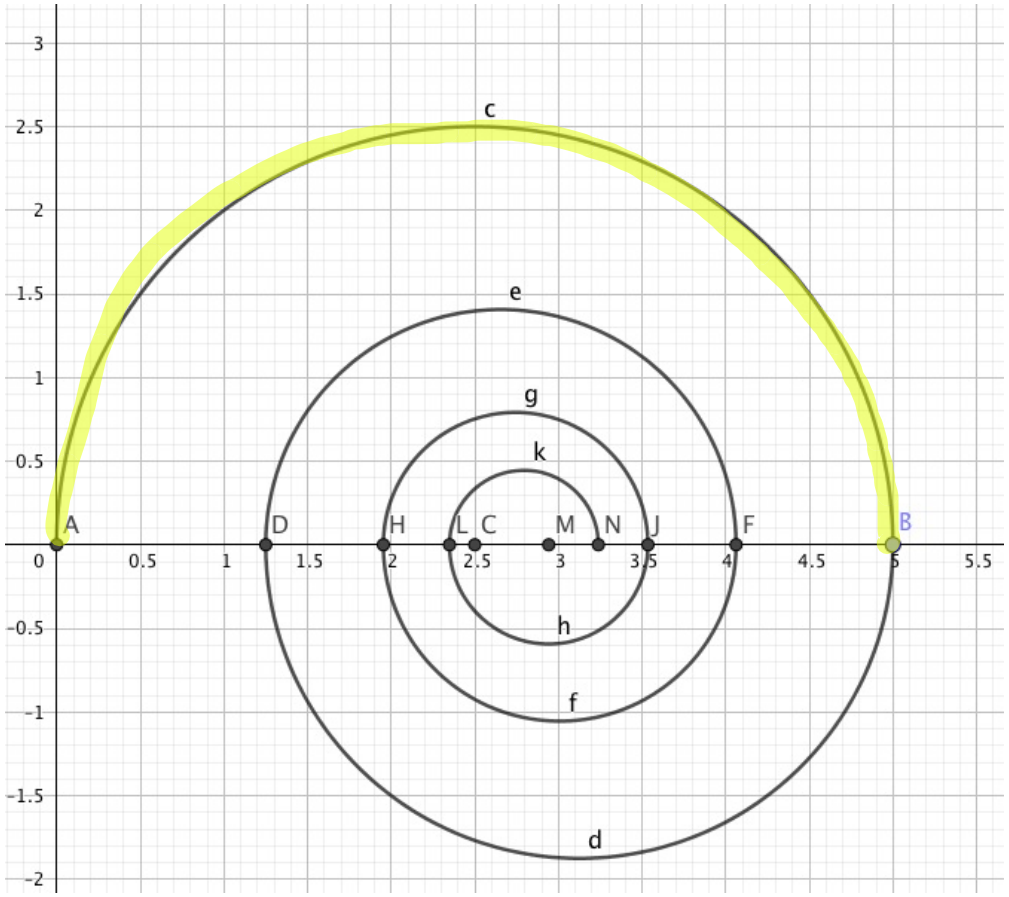
$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \overset{0<q<1}{=} \frac{-1}{q-1}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

Donc

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2.4.15 On construit une spirale à l'aide d'une série de demi-cercles. Le diamètre du premier demi-cercle vaut 1 alors que le diamètre de chacun des demi-cercles suivants est égal aux trois quarts de celui du cercle précédent. Quelle est la longueur de la spirale et autour de quel point s'enroule-t-elle ?



$$P_0 = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_1 = \pi \cdot \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$P_2 = \pi \cdot \frac{9}{32} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

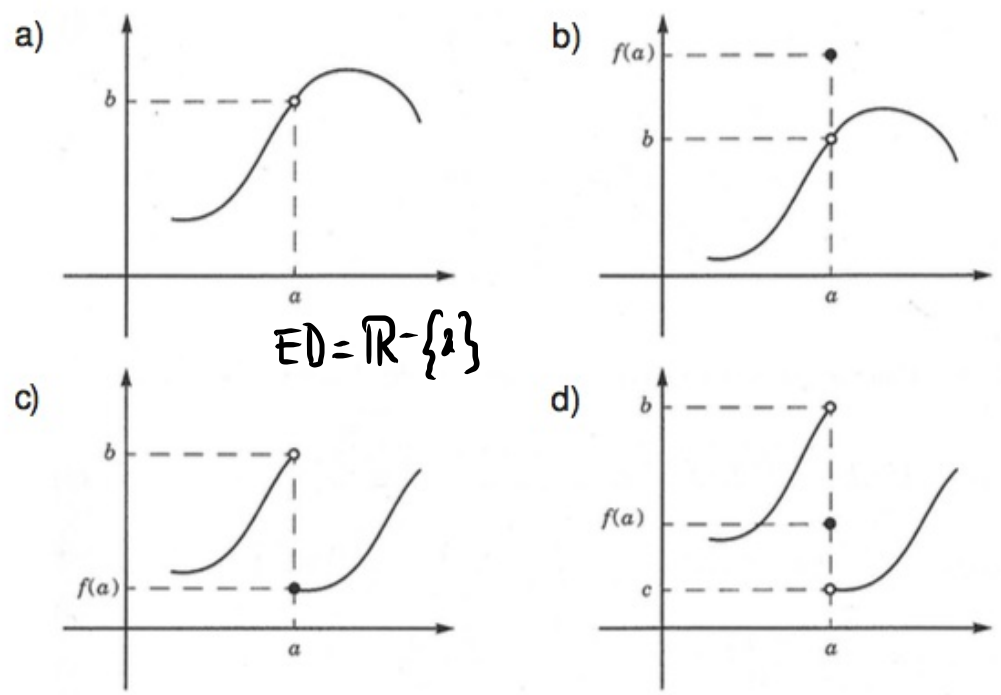
$$P_3 = \pi \cdot \frac{27}{128} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{27}{64} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$S_n = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

$$\frac{\pi}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$$

La longueur de la spirale est 2π

2.5.1 Lire les limites : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.



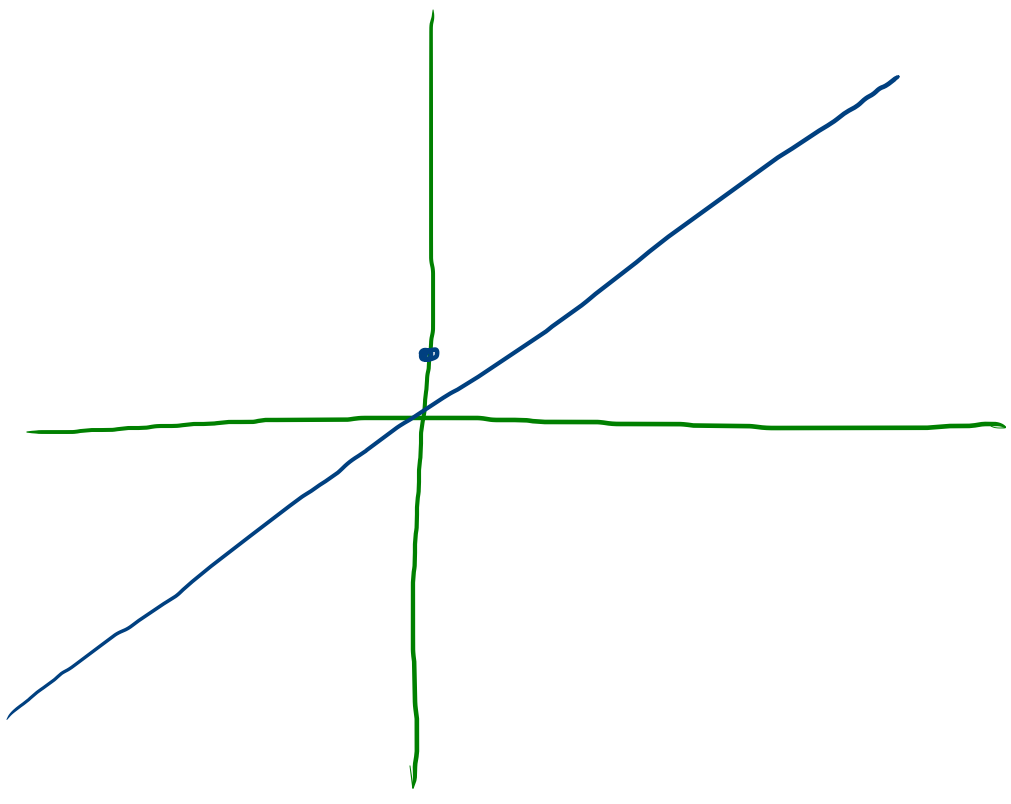
$ED = \mathbb{R} - \{a\}$

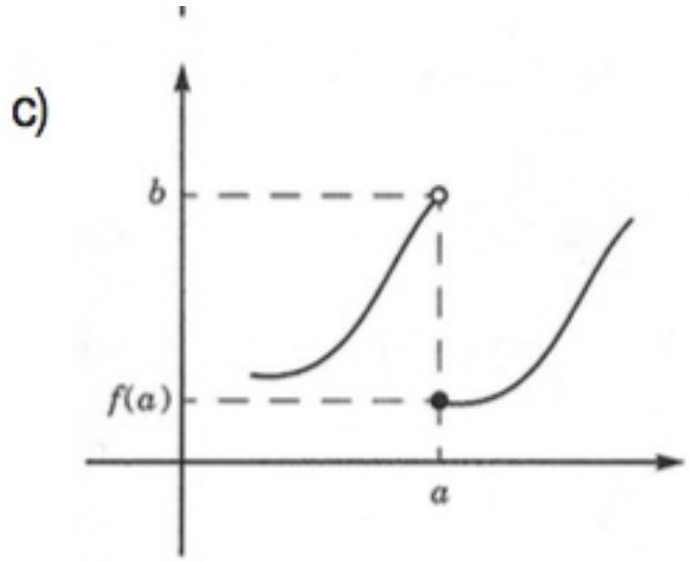
a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ Ici $f(a)$ n'est pas définie

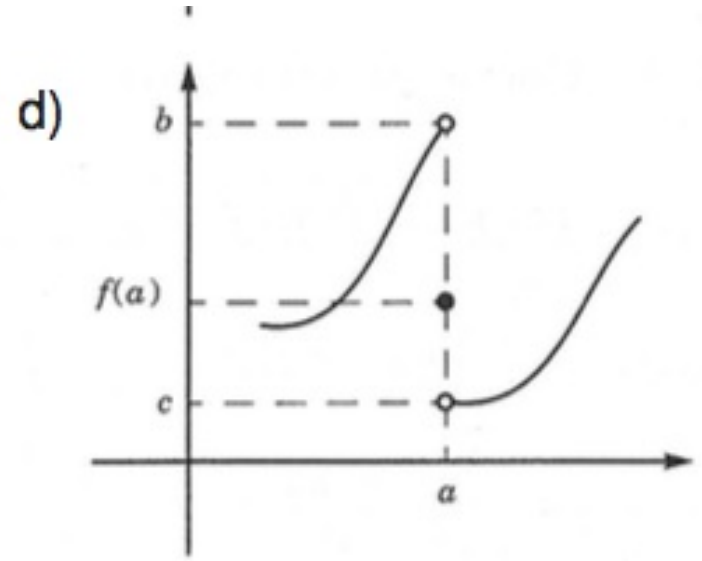
b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$

Ici f n'est pas continue en $x = a$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$







c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe

d) $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = c$

$\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe

2.5.2 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3 - 2x^2 + x - 1)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 5x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3x^2}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}(-5)$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-5}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)+1}{2-\tan(x)}$

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1$ $\qquad ED = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$

b)

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

pôle

$$\lim_{x \to 2} f(x) = ?$$