15.11.19

Suites

Une suite est une application

$$(U_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U_n$$

U_n est le n-ième élément de la suite

$U_n = \sqrt{n} + 1$ explicite

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + 1 & n \geq 1 \end{cases}$$

2.4.1 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\dfrac{n}{n+2}$, avec $n \geq 1$

b) $1 + (-1)^n$, avec $n \geq 1$

c) $n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, avec $n \geq 1$

d) $\sqrt{n^2 + 3n} - n$, avec $n \geq 1$

a) $U_n = \dfrac{n}{n+2}$

b) $U_n = 1 + (-1)^n$

$(U_n) = (0, 2, 0, 2, \ldots)$ suite alternée

d) $(U_n) = \left(1, \sqrt{10} - 2, \sqrt{18} - 3, \sqrt{28} - 4, \ldots\right)$

2.4.2 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{3} \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

b) $(a_n) = \left(3, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

$a_3 = \dfrac{\frac{1}{3} - 2}{3} =$

2.4.3 Trouver les termes généraux des suites :

a) 4 7 10 13 16 ...

b) 2 8 18 32 50 ...

c) $1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \ldots$

d) $-\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \ldots$

e) -3 9 -27 81 -243 ...

f) $1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[5]{5} \quad \ldots$

d) $u_n = \frac{n-2}{n+1}$

e) $u_n = (-3)^n$

f) $u_n = \sqrt[n]{n}$

2.4.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$

b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

c) $c_n = 2n^2 - 7n$, avec $n \geq 2$

d) $d_n = \frac{n}{n^2+10}$, avec $n \geq 3$

e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

f) $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

- Une suite est croissante (strictement croissante) si $U_n - U_{n-1} \geq 0$ $(U_n - U_{n-1} > 0)$ pour tout n

- Une suite est décroissante si $U_n - U_{n-1} \leq 0$

- Une suite croissante ou décroissante est dite monotone

- Une suite (U_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|U_n| \leq M$ pour tout n.
  Une suite est bornée si elle est à la fois minorée et majorée

2.4.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$ b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

a) $(a_n) = \left(1, \frac{7}{4}, \frac{17}{9}, \frac{31}{16}, \ldots\right)$

- minorée $1 \leq a_n$ $]-\infty ; 1]$
- majorée $a_n < 2$ $[2 ; +\infty[$
- bornée $[1 ; 2[$
- croissante : $a_{n+1} - a_n$ $n \geq 1$

$$\left(\cancel{2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(\cancel{2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0$$