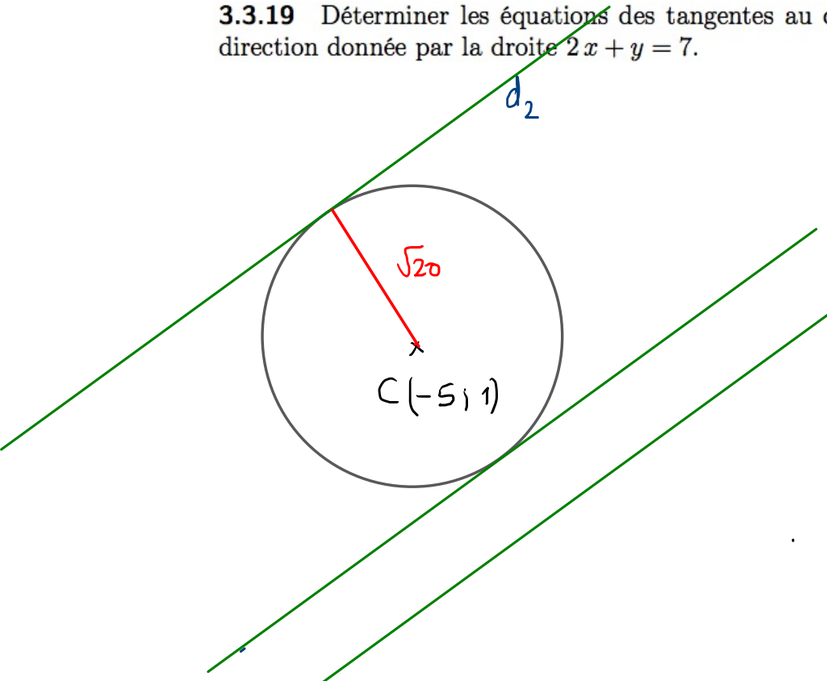
16.06.20

3.3.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, de direction donnée par la droite $2x + y = 7$.



d_1

$(f): 2x + y - 7 = 0$

$(\gamma): \quad x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 25 + 1$

$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20$

$\gamma\left((-5,1), \sqrt{20}\right)$

Nous cherchons deux droites parallèles à f :

$$(d): \quad 2x + y + e = 0$$

$$\delta(c,d) = \sqrt{20} \iff \frac{|2\cdot(-5) + 1\cdot 1 + e|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{20}$$

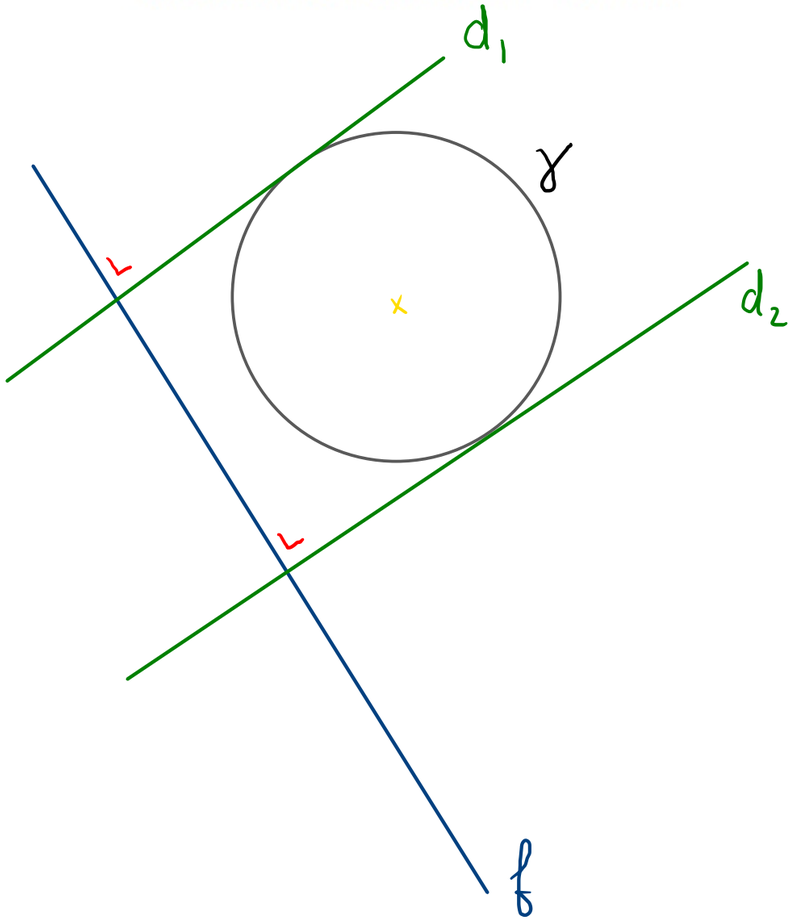
$$|-9 + e| = 10 \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -1 \\ e_2 = 19 \end{cases}$$

Les deux droites cherchées sont

$(d_1): \quad 2x + y - 1 = 0$

$(d_2): \quad 2x + y + 19 = 0$

3.3.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2y + 345$.



$(f): x - 2y - 345 = 0$

$(d): 2x + y + e = 0$

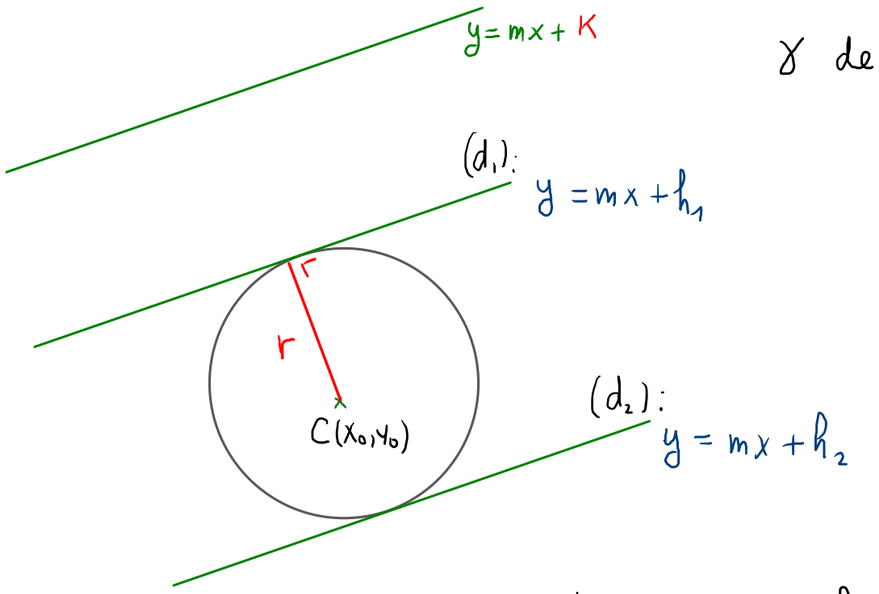
$(p): ax + by + c = 0$ $\qquad m_p = -\frac{a}{b}$

$(p_\perp): bx - ay + e = 0$ $\qquad m_{p_\perp} = \frac{b}{a}$

$m_p \cdot m_{p_\perp} = -1$

$(\gamma): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

Tangentes à un cercle de pente m donnée



γ de centre C et de rayon r

$$\boxed{(d):\ mx - y + h = 0}$$

$$\delta(d, C) = r \iff \frac{|m \cdot x_0 - y_0 + h|}{\sqrt{m^2+1}} = r$$

$$\Rightarrow |m x_0 - y_0 + h| = r\sqrt{m^2+1}$$

$$m x_0 - y_0 + h = \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$h = y_0 - m x_0 \pm r\sqrt{m^2+1}$$

En substituant h dans l'équation de départ

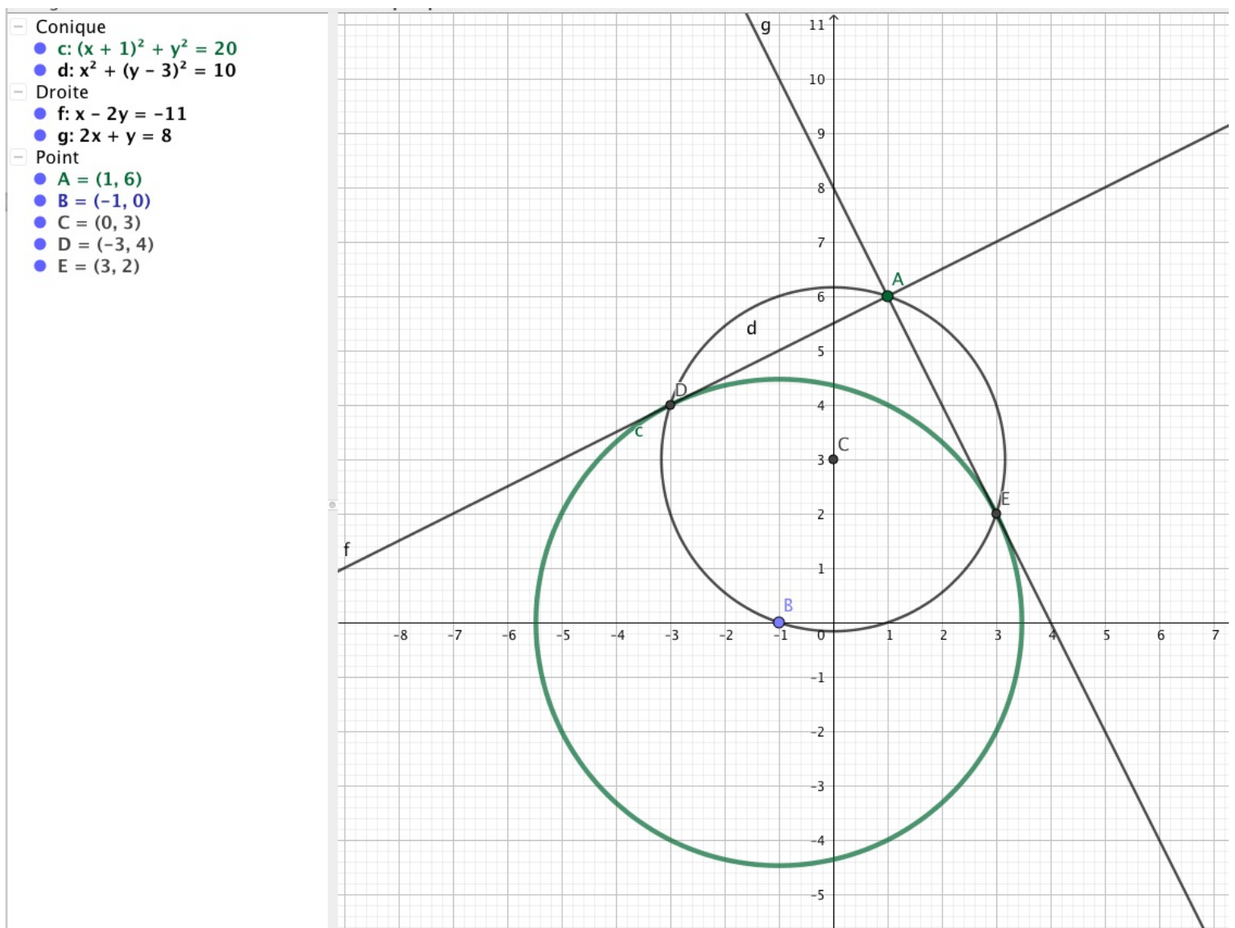
$$y = mx + y_0 - m x_0 \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

3.3.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1;6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

(γ) : $(x+1)^2 + y^2 = 20$ $\qquad C(-1;0)$, $r = \sqrt{20}$

$A(1;6) \notin \gamma$ $\qquad$ A est à l'extérieur du cercle

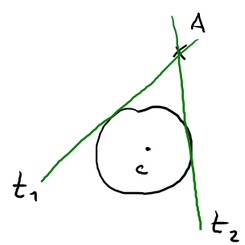


Ici, on cherche les intersections du cercle de Thalès et du cercle donné

3.3.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1;6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

(γ) : $(x+1)^2 + y^2 = 20$ $\qquad C(-1,0)$, $r = \sqrt{20}$

$A(1;6)$



Cherchons avec la formules des tangentes de pente m

$$(t_{1,2}) : y - 0 = m(x+1) \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$A \in t_{1,2} : \quad 6 = m(1+1) \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

Il faut déterminer m.

$$6 - 2m = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \; (\;)^2$$

$$36 - 24m + 4m^2 = 20m^2 + 20 \quad \Big| \; CL$$

$$16m^2 + 24m - 16 = 0 \quad \Big| \; \div 8$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$(2m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1/2 \\ m = -2 \end{cases}$$

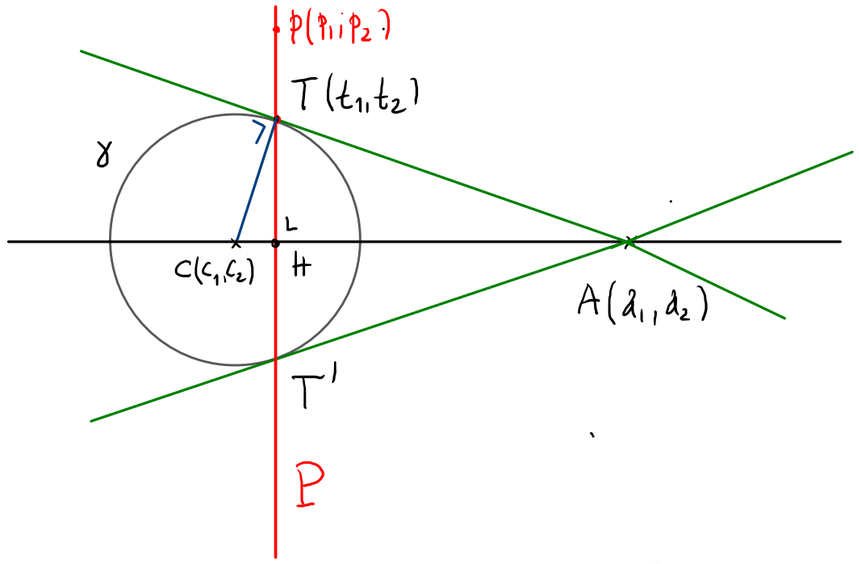
On a les deux tangentes :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + h \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} + h \Rightarrow h = \frac{11}{2} \\ y = -2x + h \Rightarrow 6 = -2 + h \Rightarrow h = 8 \end{cases}$$

ou

donc $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \\ y = -2x + 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$

Tangentes à un cercle par un point donné



γ centre $C(c_1, c_2)$, rayon r

p est la droite qui passe par les deux points de contact des tangentes.

p est la polaire du point A par rapport à γ

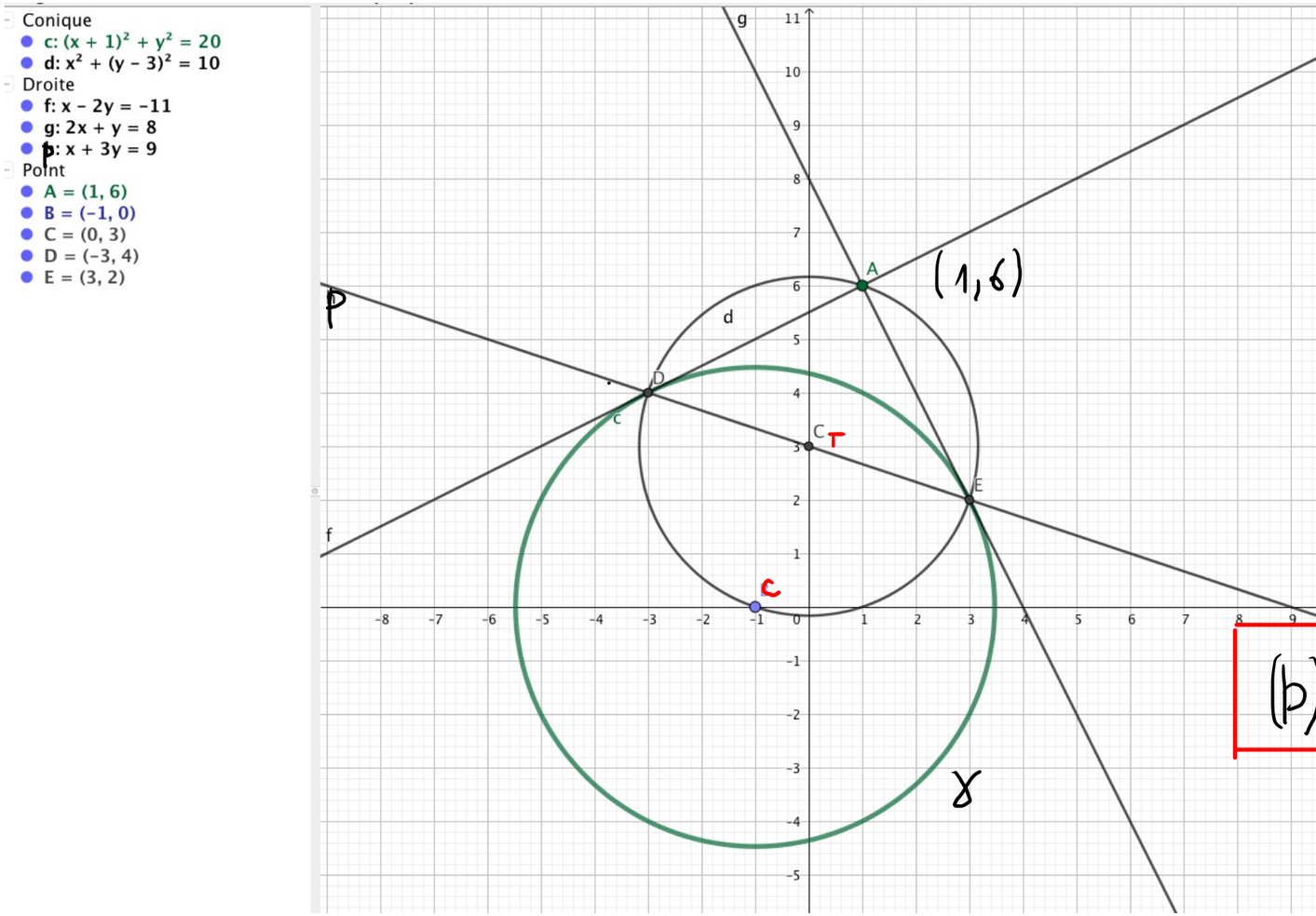
$$\|\vec{CH}\| = \frac{|\vec{CT} \cdot \vec{CA}|}{\|\vec{CA}\|} \quad \text{et} \quad \|\vec{CH}\| = \frac{|\vec{CP} \cdot \vec{CA}|}{\|\vec{CA}\|}$$

$$\vec{CT} \cdot \vec{CA} = \vec{CT} \cdot (\vec{CT} + \vec{TA}) = \vec{CT} \cdot \vec{CT} + \underbrace{\vec{CT} \cdot \vec{TA}}_{0} = r^2$$

$$\vec{CP} \cdot \vec{CA} = \vec{CT} \cdot \vec{CA} = (t_1 - c_1)(t_1 - a_1) + (t_2 - c_2)(t_2 - a_2)$$

$$\vec{CT} = \begin{pmatrix} t_1 - c_1 \\ t_2 - c_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{CA} = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la polaire, on dédouble l'équation du cercle.



$$2x + 6y - 18 = 0$$

$$\boxed{(p): x + 3y - 9 = 0}$$

$$(\gamma): \ (x+1)^2 + y^2 = 20$$

$$(\gamma): \ (x+1)(x+1) + y \cdot y = 20$$

$$(p): \ 2(x+1) + 6y = 20$$