19.03.20

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

① Ensemble de définition

Signe de $\dfrac{x^3}{x-2}$

x		0		2	
$\dfrac{x^3}{x-2}$	+	0	−	‖	+

$ED(f) =]-\infty ; 0] \cup]2 ; +\infty[$

② Parité : aucune cf $ED(f)$

③ Périodicité : aucune

④ Signe de $f(x)$

x		0		2	
$f(x)$	+	0		‖	+

⑤ AV

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty \qquad \text{AV à droite} \quad x = 2$$

AHD : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}} = +\infty$ pas de AHD

AHG : $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$ pas de AHG

AOD : $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}(1-\frac{2}{x})}} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x - x + 2)}{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}} \cdot \sqrt{x}(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\underbrace{\sqrt{1+..}}_{\to 1} \cdot (1 + \underbrace{\sqrt{1+...}}_{\to 2})} = 1$$

$$\boxed{\text{AOD} : y = x + 1}$$

$$\boxed{\text{AOG} : y = -x - 1}$$ en exercice

Formules

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

AH/AO à droite :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = +\infty \text{ pas d'AH}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\underbrace{(1-\frac{2}{x})}_{>0}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}^{\,1}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 1 \quad AO: y=x+h$$

$$h = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x-2}-x^2}{\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}+x}$$

$$: \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x-2}-x^2}{\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2}{(x-2)\left[\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\right]} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^{\cancel{2}}}{\sqrt{x-2}\,\cancel{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\underbrace{(\sqrt{1-\frac{2}{x}})}_{1}\cdot\cancel{\sqrt{x}}\underbrace{(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}})}_{2}} = 1$$

$\Rightarrow$ AOD $y = x+1$

⑥ Croissance

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}\right)' \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{x^3}{x-2}\right)' = \frac{3x^2(x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2\left(3(x-2) - x\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2(2x-6)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} \qquad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \right.$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x^2(x-3)}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}} = \boxed{\frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{|x|}\sqrt{\frac{\cancel{x-2}^{\,1}}{x(x-2)^{\cancel{4}3}}} = \frac{|x|\,(x-3)}{\sqrt{x(x-2)^3}} \qquad \boxed{\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}}$$

$$ED(f') = ED(f) - \{0\}$$

Tableau de la croissance

$$= \frac{\sqrt{x}\,(x-3)}{(x-2)\sqrt{x-2}}$$

x		0		2		3	
$f'(x)$	$-$	‖	//////	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	//////	‖	↘	min	↗

Mais $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$

Min $(3 ; 3\sqrt{3})$

c) <u>Etude de la courbure</u>

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

$$\left(\sqrt{x^3(x-2)^3}\right)' = \frac{3x^2(x-2)^3 + x^3 \cdot 3(x-2)^2}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

$$= \frac{3x^2(x-2)^2\left[(x-2)+x\right]}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

$$= \frac{3x^2(x-2)^2(\overbrace{2x-2}^{2(x-1)})}{\cancel{2}\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

$$= \frac{3x^{\cancel{2}}(x-2)^{\cancel{2}}(x-1)}{\cancel{x}\,\cancel{(x-2)}\sqrt{x(x-1)}} = \frac{3x(x-1)(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2-6x)\sqrt{x^3(x-2)^3} - (x^3-3x^2)\dfrac{3x(x-1)(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}}}{x^3(x-2)^3}$$

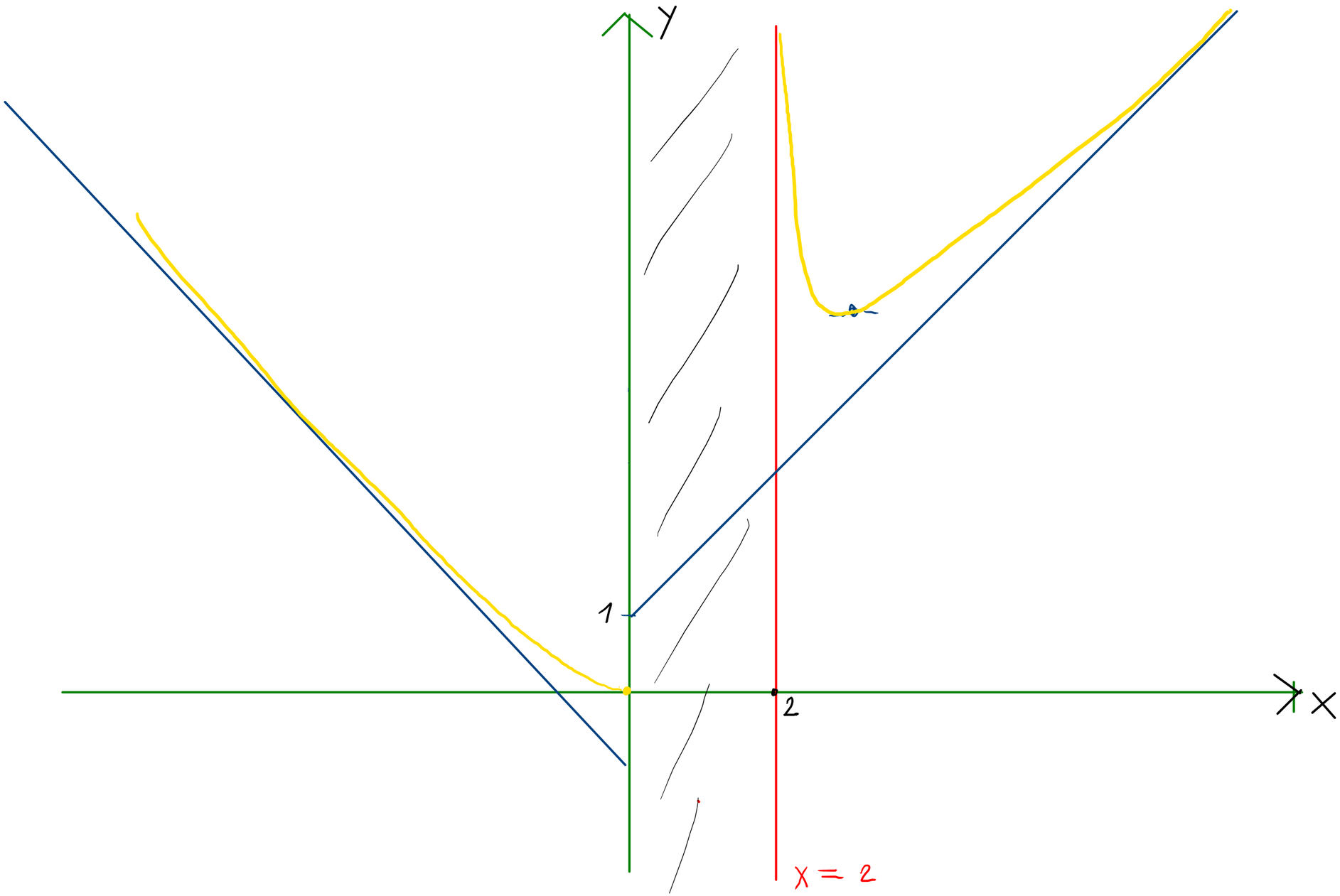
$$= \frac{\overbrace{(3x^2-6x)\,x^2(x-2)^2}^{3x(x-2)} - \overbrace{(x^3-3x^2)}^{x^2(x-3)}\,3x(x-1)(x-2)}{x^3(x-2)^3\sqrt{x(x-2)}}$$

$$= \frac{3x^3(x-2)^3 - 3x^3(x-3)(x-1)(x-2)}{x^3(x-2)^3\sqrt{x(x-2)}} =$$

$$= \frac{\cancel{3x^3}\cancel{(x-2)}\left[(x-2)^2 - (x-3)(x-1)\right]}{\cancel{x^3}(x-2)^{\cancel{3}\,2}\sqrt{x(x-2)}} = \frac{3[1]}{(x-2)^2\sqrt{x(x-2)}}$$

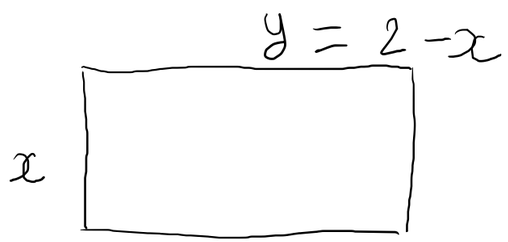
$\forall x \in ED(f'')$, $f''(x) > 0$ ouf !

f est convexe partout !


y
1
2
x
x = 2

2.9.12 Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 4 m, quel est celui qui a la plus grande surface ?

(1)



Soit x un côté du rectangle

$$x + y + x + y = 4$$

$$2x + 2y = 4$$

$$x + y = 2$$

(2) Aire : $A(x) = x(2 - x)$ $\qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$

$$A(x) = 2x - x^2$$

(3) Extrema $A'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$

(4) Tableau de la croissance :

x		0		1		2	
$A'(x)$	//		+	0	−		//
$A(x)$	//	0	↗	max	↘	0	//

Max $(1 ; 1)$

L'aire maximale est atteinte lorsque le rectangle est un carré de côté 1.

2.9.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?