

2.9.15 (suite et fin)

25.03.20

$$p(r) = 15\pi \frac{r^3 + 216}{r}, \quad r > 0$$

$$p'(r) = 15\pi \frac{3r^2 \cdot r - (r^3 + 216)}{r^2} = 15\pi \frac{2r^3 - 216}{r^2} = 30\pi \frac{r^3 - 108}{r^2}$$

$$ED(f') = \mathbb{R}^*, \quad \text{condition } r > 0$$

$$\text{zéro de } p'(r) : \quad r^3 - 108 = 0 \Leftrightarrow r^3 = 108 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$$

$$r \cong 4,78 \text{ [cm]}$$

Tableau de la croissance

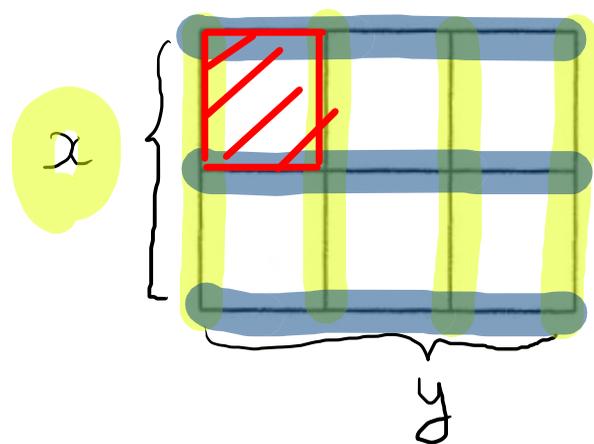
r	0	$3\sqrt[3]{4}$
$p'(r)$	/	- 0 +
$p(r)$	/	min ↗

Le min est atteint pour $r = 3\sqrt[3]{4}$

$$h = \frac{324}{(3\sqrt[3]{4})^2} = \frac{\overset{36}{\cancel{324}}}{\underset{1}{9} \sqrt[3]{16}} = \frac{36}{2^3 \sqrt[3]{2}} = \frac{18}{\sqrt[3]{2}} \cong 14,28 \text{ [cm]}$$

$$= \frac{18}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{18}{2} \sqrt[3]{4} = 9\sqrt[3]{4} = 3r$$

2.9.16 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.



$$\square \quad \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} = \frac{xy}{6}$$

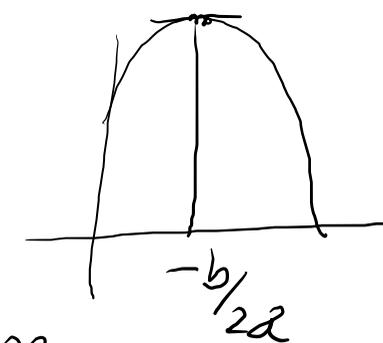
$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{288 - 144}{3} \\ &= \frac{144}{3} = 48 \end{aligned} \right\}$$

$$4x + 3y = 288 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{288 - 4x}{3}$$

$$\text{Aire totale : } A(x, y) = 6 \cdot \frac{xy}{6} = xy, \quad x, y > 0$$

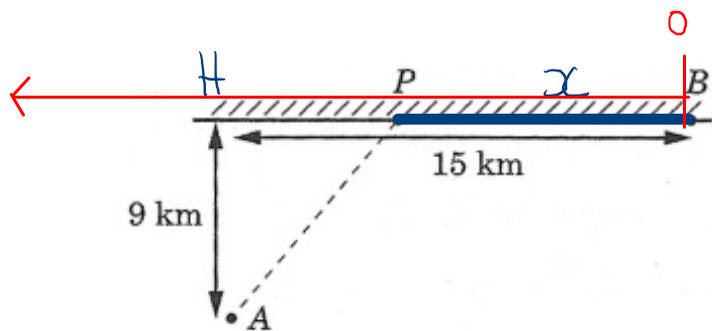
$$A(x, y) = A(x) = x \cdot \frac{288 - 4x}{3} = \frac{1}{3} (288x - 4x^2)$$

$A(x)$ est une "parabole" concave; elle admet un max en $x = \frac{-288}{-8} = 36$



Les dimensions à donner sont : 18 [m] sur 16 [m]

2.9.23 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal? La côte est supposée rectiligne.



Minimiser le temps de parcours

$$d = vt \quad , \quad t = \frac{d}{v}$$

$$\text{Temps : } \frac{AP}{4} + \frac{PB}{5}$$

$$(K \cdot u(x))' = K \cdot u'(x)$$

$$PB = x \quad , \quad 0 \leq x \leq 15$$

$$AP = \sqrt{9^2 + HP^2} = \sqrt{81 + (15-x)^2} = \sqrt{306 - 30x + x^2}$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{4} + \frac{x}{5} \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq 15 \quad , \quad \text{ED}(f) = \mathbb{R}$$

$$t(x) = \frac{5\sqrt{x^2 - 30x + 306} + 4x}{20} = \frac{1}{20} \left(5\sqrt{x^2 - 30x + 306} + 4x \right)$$

Déterminons la dérivée de la fonction $t(x)$:

$$t'(x) = \frac{1}{20} \left[5 \frac{2x - 30}{2\sqrt{x^2 - 30x + 306}} + 4 \right] = \frac{1}{20} \left[\frac{5(x - 15)}{\sqrt{x^2 - 30x + 306}} + 4 \right]$$

$$t'(x) = \frac{1}{20} \left[\frac{5(x-15)}{\sqrt{x^2-30x+306}} + 4 \right] = \frac{1}{20} \frac{5(x-15) + 4\sqrt{x^2-30x+306}}{\sqrt{x^2-30x+306}}$$

Calculons les zéros de $t'(x)$. Ses zéros sont ceux du numérateur.

$$5x - 75 + 4\sqrt{x^2 - 30x + 306} = 0$$

$$4\sqrt{x^2 - 30x + 306} = \underbrace{-5x + 75}_{\geq 0} \quad | (\)^2 \quad 0 \leq x \leq 15$$

$$16(x^2 - 30x + 306) = 25x^2 - 750x + 5625$$

$$9x^2 - 270x + 729 = 0 \quad | :9$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$(x - 27)(x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \cancel{x = 27} & 3 \\ \text{\color{red}à exclure} & \end{array}$$

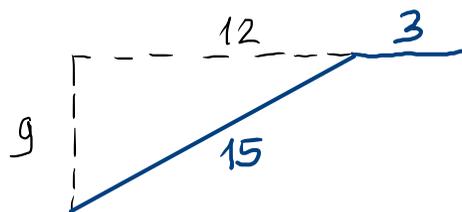
Tableau des variations

x	0	3	15
$t'(x)$	/	- 0 +	/
$t(x)$	/	min	/

$$t'(0) = \frac{1}{20} \left(5 \cdot \frac{-30}{2\sqrt{306}} + 4 \right) < 0$$

Le minimum est atteint

lorsque $x = 3$



$$\frac{15}{4} + \frac{3}{5} = \frac{87}{20} \text{ [h]}$$

$$= 4 \text{ h } \frac{7}{20} \text{ min} = \underline{\underline{4 \text{ h } 21 \text{ min}}}$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{4} + \frac{x}{5}$$

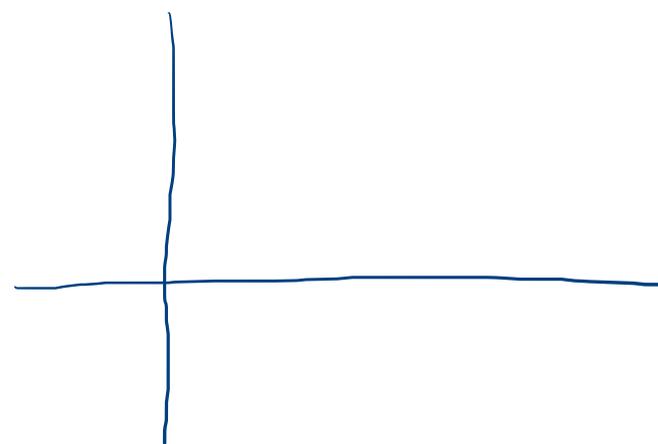
$$ED(f) = \mathbb{R}$$

$$x^2 - 30x + 306 \geq 0$$

$$x^2 - 30x + 306 = 0$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 306 = 900 - 1224 = -324 < 0$$

$$\text{Sommet : } -\frac{b}{2a} = \frac{30}{2} = 15$$



pas de zéro

2.9.10

$$e) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

$$u = x^4 - 12x^2 \quad ; \quad u' = 4x^3 - 24x$$

$$v = (x^2 - 4)^2 \quad ; \quad v' = 2(x^2 - 4) \cdot 2x = 4x(x^2 - 4)$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 4x(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2 - 6)(x^2 - 4)^2 - 4x^3(x^2 - 12)(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{4x \cancel{(x^2 - 4)} [(x^2 - 6)(x^2 - 4) - x^2(x^2 - 12)]}{(x^2 - 4)^{4-1}}$$

$$= \frac{4x [x^4 - 10x^2 + 24 - x^4 + 12x^2]}{(x^2 - 4)^3} = \frac{4x(2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

2.9.3 Dessiner un graphe possible de $y = f(x)$ connaissant les informations suivantes sur la dérivée :

- $f'(x) < 0$, pour $x \in]-\infty; -3[$, décroissante (strictement)
- $f'(x) = 0$, pour $x = -3$ et $x = 0$,
- $f'(x) > 0$, pour $x \in]-3; 0[\cup]0; +\infty[$, croissante

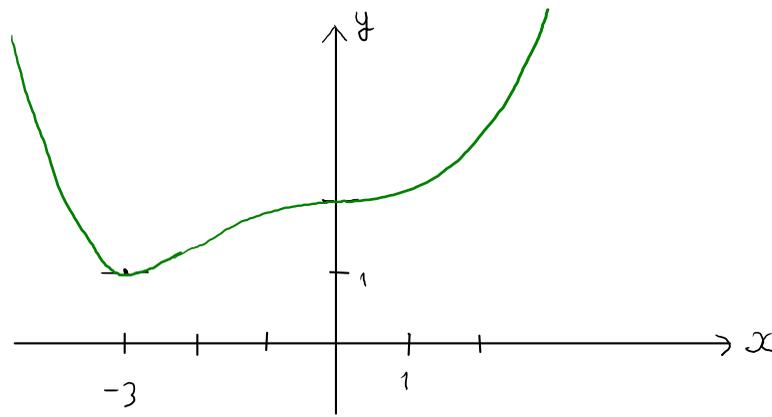


tableau des variations

x	-3		0		
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘		min	↗	
				plat	

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = (x+3)x^2$$

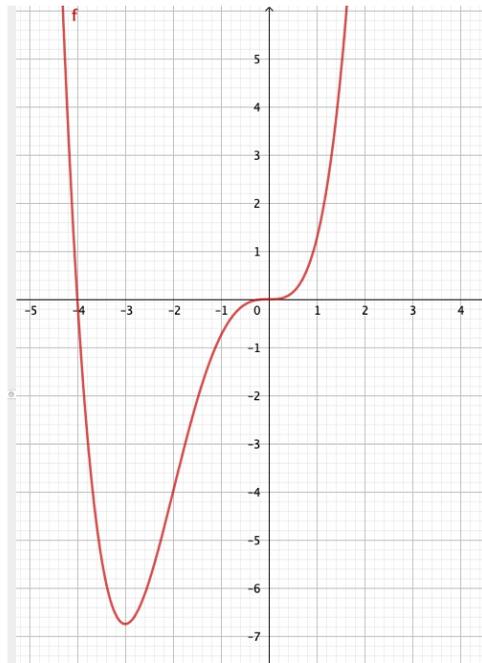
Pour déterminer f , on calcule l'intégrale de f'

$$f(x) = \int_0^x (t+3)t^2 dt$$

$$f'(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \text{constante}$$

• $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$



$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + cte$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{10} \\ \ln = \log_e \end{array} \right.$$

$$x^2 = 2x$$

$$x = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-2}{x^3}$$