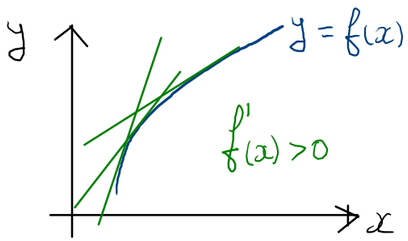
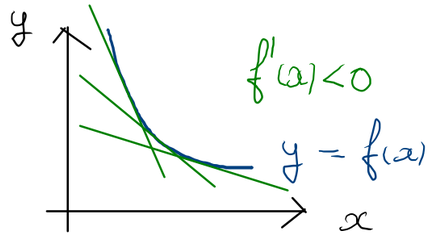
26.03.20

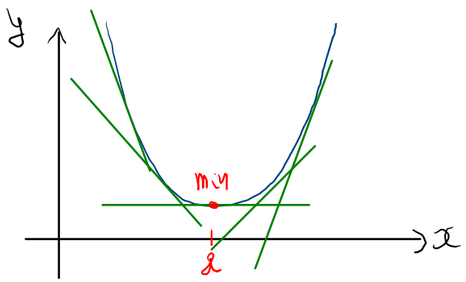
Dérivée première et croissance d'une fonction

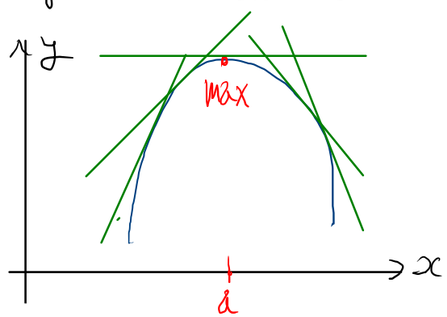


fonction croissante



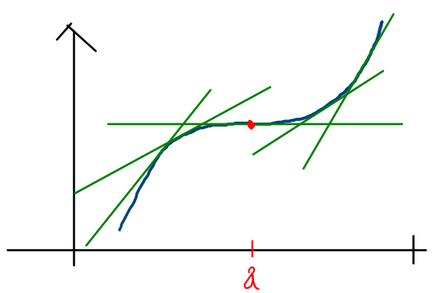
fonction décroissante





x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

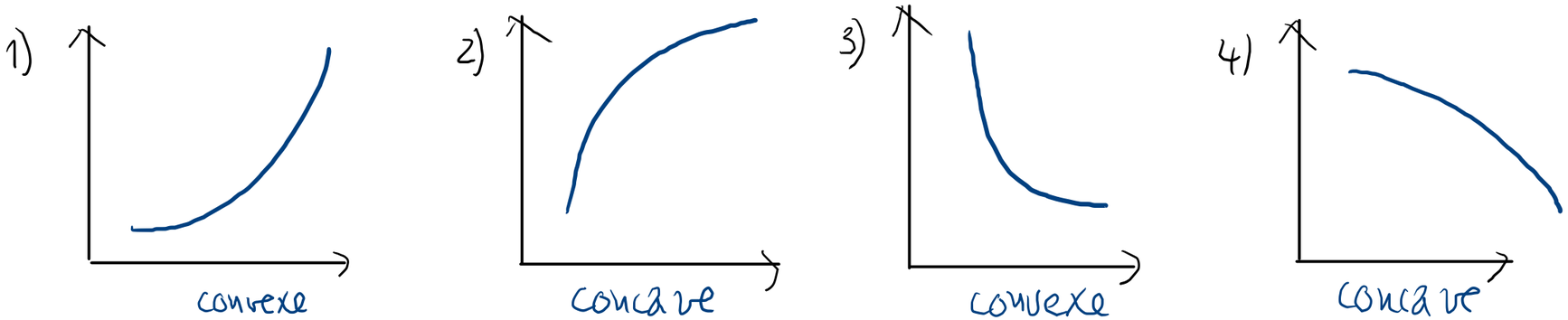
x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$



x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{\text{pi}}$	$\nearrow$

point d'inflexion à tangente horizontale

La courbure



1) La pente est positive et croissante. Donc $(f'(x))'$ est positive
2) La pente est positive et décroissante. Donc $(f'(x))'$ est négative.
3) La pente est negative et croissante. Donc $(f'(x))'$ est positive.
4) La pente est negative et décroissante. Donc $(f'(x))'$ est négative

$$(f'(x))' = f''(x)$$

La dérivée seconde donne des informations sur la courbure du graphe

Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction bijective

$$x \xmapsto{f} y$$

$$x \xleftarrow[f^{-1}]{} y$$

fonction bijective

$$\boxed{\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}}$$

Exemple

$$x \xmapsto{f} x^2$$

$$\sqrt{y} \xleftarrow[g]{} y$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Démonstration : 4)

On suppose f dérivable en un point x_0 de I, et $f'(x_0)$ et non nul.

On montre que f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et que $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

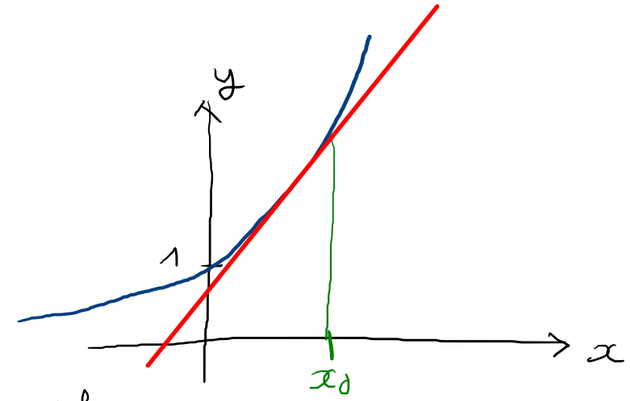
Pour cela on montre que le rapport $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ a une limite lorsque y tend vers y_0 et que cette limite est $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Soit $x = f^{-1}(y)$; on a $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et par conséquent $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$.

Or f^{-1} est continue, donc quand y tend vers $y_0, x = f^{-1}(y)$ tend vers $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et le rapport $\dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ a une limite puisque f est dérivable en x_0 et que sa dérivée $f'(x_0)$ est non nulle. Cette limite est bien égale à $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Dérivée de e^x et $\ln(x)$

1) Posons $f(x) = e^x$, $ED(f) = \mathbb{R}$



$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x_0) = \left(e^{x_0}\right)'$

$$\left(e^{x_0}\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

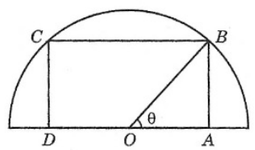
2) $x \longmapsto e^x$

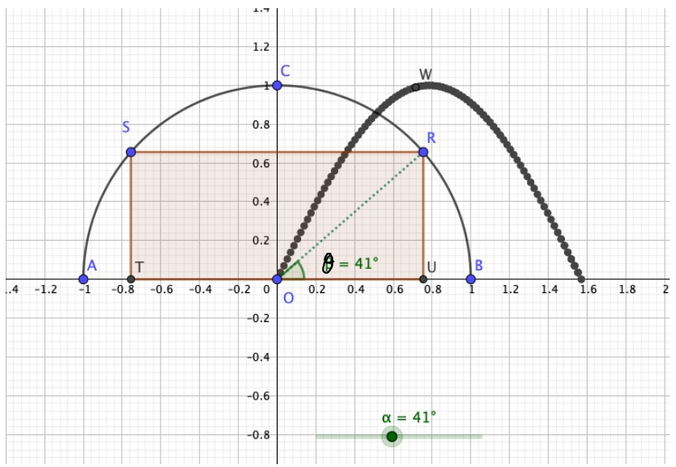
$\ln(y) \longleftarrow y$

$$\left(\ln(y)\right)' = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

$$\boxed{\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}}$$

2.9.20 Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale en prenant l'angle θ comme variable.





Aire du rectangle :

$$\mathcal{A}(\theta) = TU \cdot RU$$
$$= 2OU \cdot RU$$
$$= 2\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$$
$$\boxed{\mathcal{A}(\theta) = \sin(2\theta)} \qquad 0 \cancel{\leq} < \theta \cancel{\leq} < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{A}'(\theta) = \cos(2\theta) \cdot 2 \qquad 0 \cancel{\leq} < \theta \cancel{\leq} < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{A}'(\theta) = 0 \iff \cos(2\theta) = 0$$
$$\iff 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

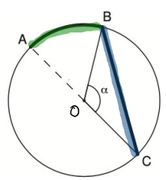
θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}'(\theta)$	//	$+$	0	$-$	//
$\mathcal{A}(\theta)$	//	↗	max	↘	//

Les dimensions du rectangles : $2\cos(\theta) \times \sin(\theta)$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

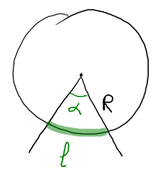
L'aire vaut 1.

2.9.21 Une canalisation doit relier deux points A et C en bordure d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Ces deux points sont situés sur un même diamètre de ce cercle. La canalisation passe sur terre entre les points A et B, sous l'eau entre les points B et C. Sachant que le coût de cette installation est de 3'000.- le mètre sur terre et 5'000.- le mètre sous l'eau, déterminer la valeur en degrés de l'angle $\alpha \in [0°; 180°]$ pour laquelle le coût de cette installation est minimal.

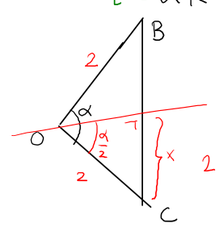


3 M CHF/Km

5 M CHF/Km



$\ell = \alpha R$ (α en radians)



$2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = x$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{2}$

coût : $3 \cdot \widehat{AB} + 5 \cdot \overline{BC}$

$= 3 \cdot (\pi - \alpha) \cdot 2 + 5\, BC$

$= 6(\pi - \alpha) + 5 \cdot 2 \cdot 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$

$$\boxed{C(\alpha) = 6(\pi - \alpha) + 20 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$C'(\alpha) = -6 + 20 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -6 + 10 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$C'(\alpha) = 0 \iff 10 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6 \iff \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow \alpha =$ 0.927295218001612

$\frac{\alpha}{2} \cong \begin{cases} 0{,}92730 + k\,2\pi \\ -0{,}92730 + k\,2\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha \cong \begin{cases} 1{,}85 + k \cdot 4\pi \\ -1{,}85 + k\,4\pi \end{cases}$

Dans $[0, \pi]$, $\alpha \cong 1{,}85 \cong$ 106.260204708311957°

Tableau des variations

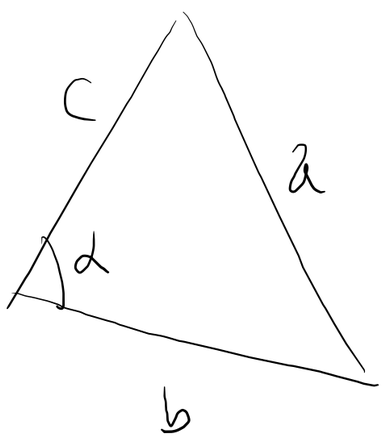
α	0		$1{,}85$		π
$C'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$C(\alpha)$	min	↗	max	↘	min

Les minima se situent aux bornes de l'ensemble

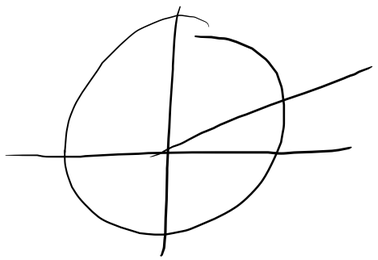
$C(0) = 18{,}85$ MCHF

$C(\pi) = 20$ MCHF

Le min est atteint lorsque $\alpha = 0$.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = 4 + 4 - 8$$

$$(\sin(\alpha))' = \cos(\alpha)$$