

27.11.19

2.4.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a)  $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ , avec  $n \geq 1$

b)  $b_n = -n!$ , avec  $n \geq 1$

c)  $c_n = 2n^2 - 7n$ , avec  $n \geq 2$

d)  $d_n = \frac{n}{n^2 + 10}$ , avec  $n \geq 3$

e)  $e_n = 3^{1+(-1)^n}$ , avec  $n \geq 1$

f)  $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

d)  $(d_n)_{n \geq 3}$        $d_n = \frac{n}{n^2 + 10}$

$$\left( \frac{3}{19}, \frac{4}{26}, \frac{5}{35}, \dots \right)$$

$m \in \mathbb{R}$        $d_n \geq m \quad \forall n$       minorée par 0

$0 < d_n < 1$       borné'

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2 + 10} - \frac{n}{n^2 + 10} = \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 10) - n((n+1)^2 + 10)}{((n+1)^2 + 10)(n^2 + 10)} \\ &= \frac{(n^3 + n^2 + 10n + 10) - (n^3 + 2n^2 + 11n)}{((n+1)^2 + 10)(n^2 + 10)} \\ &= \frac{-n^2 - n + 10}{((n+1)^2 + 10)(n^2 + 10)} < 0 \end{aligned}$$

Signe de  $-n^2 - n + 10$        $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10$

$$n_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{-2} \approx 2,7 < 3$$

$$n_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{-2} < 0$$

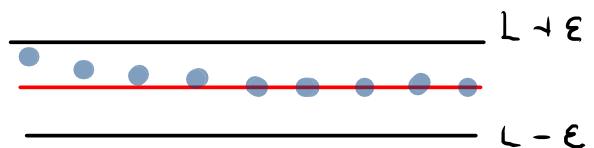
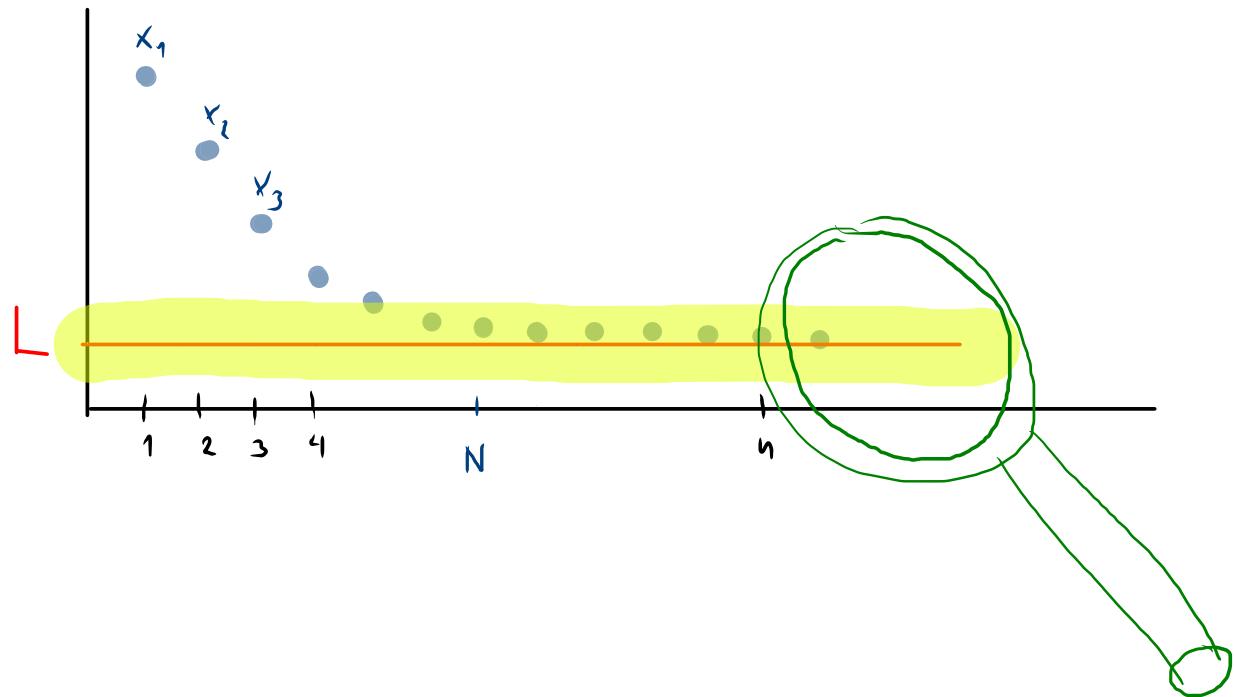
$$\frac{n}{-n^2 - n + 10} \quad \begin{array}{c|cc} n & n_2 & n_1 \\ \hline -n^2 - n + 10 & -\phi & +\phi \end{array}$$

$$0 < \frac{n}{n^2 + 10} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

## Suites convergentes

vers  $L \in \mathbb{R}$

Une suite  $(x_n)$  est convergente vers  $L$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$ , on a  $|x_n - L| < \epsilon$



**2.4.5** Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $\epsilon > 0$ . Si on accepte que la suite converge vers  $L$ , trouver le plus petit entier positif  $N$  tel que  $|u_n - L| < \epsilon$ , pour tout  $n > N$ .

a)  $u_n = \frac{3}{n-2}$ , avec  $L = 0$  et  $\epsilon = 0,1$       b)  $u_n = \frac{n}{n+1}$ , avec  $L = 1$  et  $\epsilon = 0,25$

En considérant  $\epsilon$  quelconque, démontrer que les suites ci-dessus sont convergentes.

a) A partir de quel  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$|u_n - 0| < 0,1 \quad , \text{ pour } n > N$$

$$n > 2 : \left| \frac{3}{n-2} - 0 \right| = \frac{3}{n-2} < \epsilon \quad n-2 > 0$$

$$\frac{3}{n-2} = \epsilon$$

$$3 = \epsilon(n-2)$$

$$3 = \epsilon \cdot n - 2\epsilon$$

$$3 + 2\epsilon = \epsilon n$$

$$n = \frac{3 + 2\epsilon}{\epsilon}$$

On choisit  $N = \left[ \frac{3 + 2\epsilon}{\epsilon} \right]$

$$\epsilon = 0,1 , \boxed{N = \left[ \frac{3 + 0,2}{0,1} \right] = 32}$$

$$|u_{33} - 0| = \left| \frac{3}{33-2} \right| = \frac{3}{31} \cong 0,097 < 0,1$$

b)  $u_n = \frac{n}{n+1}$ , avec  $L = 1$  et  $\epsilon = 0,25$

$(u_n)$  converge vers  $L$  si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  ( $N$  dépend de  $\epsilon$ ) tel que  $|u_n - L| < \epsilon$ ,  $n > N$

On note  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \square$

$$\epsilon = 0,25 : \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < 0,25$$

$$\left| \frac{n-n-1}{n+1} \right| < 0,25$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{4} \quad \left| \underbrace{4}_{>0} \underbrace{(n+1)}_{>0} \right.$$

$$4 < n+1$$

$$n > 3$$

On pose  $N = 3$

$$\left| u_{n-1} \right| = \left| \frac{4}{5} - 1 \right| \\ = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

Cas général

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon \quad \left| \cdot (n+1) \right.$$

$$1 < (n+1)\epsilon$$

$$1 < n\epsilon + \epsilon$$

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon} < n$$

Posons  $N = \left[ \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right]$

$\forall n > \left[ \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right], \quad |u_n - 1| < \epsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$