

Les nombres complexes

Nous allons construire un ensemble (un corps) dans lequel la condition suivante est vérifiée :

m est négatif

- (A) toute équation du type $x^2 = m$, où $m \in \mathbb{R}_-^*$
 $m < 0$
- admet une solution dans cet ensemble

Une telle équation n'admet aucune solution dans \mathbb{R}

La condition (A) est équivalente à la condition (A') :

- (A') cet ensemble contient un élément dont le carré vaut -1 .

Désignons cet élément par la lettre i .

Montreons l'équivalence entre ces deux conditions :

1) $\textcircled{A} \Rightarrow \textcircled{A'}$ évident ($m = -1$)

2) $\textcircled{A'} \Rightarrow \textcircled{A}$

Nous avons $i^2 = -1$.

$$(i\sqrt{-m})^2 = i^2 \cdot (-m) = (-1) \cdot (-m) = m$$

$$x^2 = m \Rightarrow x = \begin{cases} i\sqrt{-m} \\ -i\sqrt{-m} \end{cases}$$

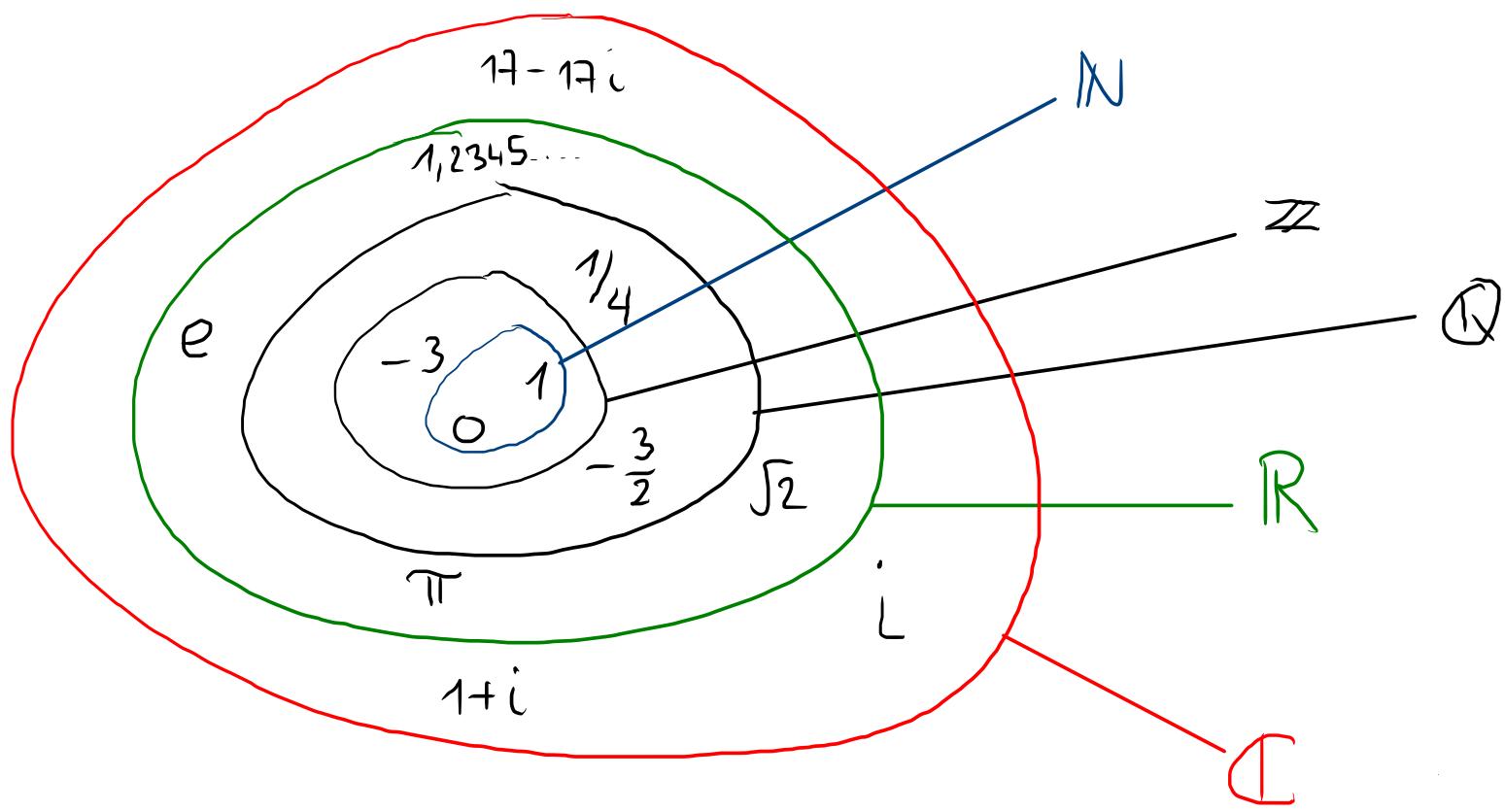
$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$x^2 = m \quad m < 0$$

$$(i\sqrt{-m})^2 = i^2 \cdot (-m) = m$$

$$x^2 = -25 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 5i \\ -5i \end{cases}$$

Cet ensemble s'appelle l'ensemble des nombres complexes et est noté par la lettre \mathbb{C}



$$z \in \mathbb{C}, \quad z = a + bi, \quad \text{où}$$

a est la partie réelle

b est la partie imaginaire

$$\underline{\text{Ex:}} \quad 1+3i, \quad -5 + \frac{17}{2}i, \quad -\sqrt{2}i, \quad 0 \in \mathbb{C}$$

1.1.1

a) $(1 + 4i) + (2 - 3i) = 3 + i$

b) $(8 + 5i) + (-8 - 5i) =$

c) $(1 + i) - (2 - 6i) =$

d) $(3 - 5i) + (-2 - 4i) - (1 - 2i) =$

e) $3(5 - 2i) + 2(7 - i) - 3(4 - 3i) = (15 - 6i) + (14 - 2i) - (12 - 9i)$
 $= 17 + i$

f) $(9 + 5i)(2 - 7i) = 18 - 63i + 10i - 35i^2 = 18 + 35 - 63i + 10i$
 $= 53 - 53i$

g) $(3 + 2i)(3 - 2i) =$

h) $(3 - 4i)^2 =$

$$\text{i) } (1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2 = (1+2i+i^2)(1+2i+i^2) \\ = 2i \cdot 2i = 4i^2 = -4$$

$$\text{j) } \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \quad [1 \div i = -i]$$

$$\text{k) } \frac{1}{2+3i} \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4-(9i^2)} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

$$(a-bi)(a+bi) = a^2 + b^2$$

On dit que $a-bi$ est le conjugué de $a+bi$

$$a+bi \quad a-bi$$

$$\overline{1-2i} = 1+2i ; \quad \overline{1+2i} = 1-2i$$

1.1.2 Calculer $i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, \dots$ En déduire une formule générale pour i^n , avec $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}i^0 &= 1 \\i^1 &= i \\i^2 &= -1 \\i^3 &= -i \\i^4 &= 1\end{aligned}$$

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{Si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{Si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{Si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

1.1.3 Résoudre dans \mathbb{C} les équations ci-dessous :

a) $2z - 3 + i = 0$

c) $(1 + 2i)z = (5 - i)z + 7 + 26i$

b) $(1 - 4i)z = 6 - 7i$

$$b) \quad (1 - 4i)z = 6 - 7i \quad | \div (1 - 4i)$$

$$z = \frac{6 - 7i}{1 - 4i}$$

$$z = \frac{6 - 7i}{1 - 4i} \cdot \frac{1 + 4i}{1 + 4i}$$

$$z = \frac{6 + 17i + 28}{17} = \frac{34}{17} + \frac{17}{17}i$$

$$z = 2 + i$$