

28.11.19

Les suites

Exercice sur la convergence des suites : démontrer, en utilisant la définition, que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$  converge vers la valeur  $\frac{3}{4}$ .

$$u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , déterminons  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\left| \frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon, \text{ pour } n > N$$

$$\frac{(3n-1)4}{(4n+5)4} - \frac{3(4n+5)}{(4n+5)4}$$

$$\left| \frac{12n-4 - 12n-15}{(4n+5)4} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{19}{(4n+5)4} < \varepsilon$$

$$19 < 16n\varepsilon + 20\varepsilon$$

$$\frac{19 - 20\varepsilon}{16\varepsilon} < n$$

$$N = \left\lceil \frac{19 - 20\varepsilon}{16\varepsilon} \right\rceil + 1$$

$$\varepsilon = 10^{-10} \Rightarrow N = \left\lceil \frac{19 - 20 \cdot 10^{-10}}{16 \cdot 10^{-10}} \right\rceil + 1 = 2789$$

$$\left| u_{2789} - \frac{3}{4} \right| < 10^{-10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{3}{4}$$

# Propriétés des limites de suites

---

Soit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergentes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

On a :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \text{ et } B \neq 0 \text{ et } b_n \neq 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = e^A$$

$$u_n = e^{\frac{3n-1}{4n+5}} \longrightarrow e^{\frac{3}{4}}$$

$$\lim \frac{7n^2 - 4n}{8n^2 + 2n}$$

$$a_n = \frac{4n}{n-1} \longrightarrow 4$$

$$b_n = e^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

$$\frac{\frac{4n}{n-1}}{e^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{4}{1}$$

2.4.6 Calculer :

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n-1}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{1-n^2}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2n(-1)^n}{n}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}}$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \cdot 4}{\cancel{n} \left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$$b) u_n = \frac{2n^2}{1-n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{1-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot 2}{\cancel{n^2} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{-1 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0}} = \frac{2}{-1} = -2$$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3} = 0$   
 "5" over "8"



$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2n(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} (3 + (-1)^n \cdot 2)}{\cancel{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n \cdot 2] = \begin{cases} 5 & n \text{ pair} \\ 1 & n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{non convergent}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^4 + 16n^2 + 1 - 32n^3 + 8n^2 - 8n}{n^4 - 2n^2 + 1}$$

$$\bullet (2n-1)^2 = (4n^2 - 4n + 1)^2$$

$$= 16n^4 + 16n^2 + 1 - 32n^3 + 8n^2 - 8n$$

$$\bullet (1-n^2)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 (16 + \dots)}{n^4 (1 + \dots)} = 16$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left( 16 + \frac{16}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{32}{n} + \frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3} \right)}{n^4 \left( 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 7}{\sqrt{n^4 \left( 1 - \frac{5}{n^4} \right)}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 7}{n^2 \sqrt{1 - \frac{5}{n^4}}} = \frac{7}{1} = 7$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{n^2-6n}} = *$$

$$\sqrt{n^4-5} = \sqrt{n^4 \cdot \left( 1 - \frac{5}{n^4} \right)} = n^2 \sqrt{1 - \frac{5}{n^4}}$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 - 4n + 1}{n^2 - 6n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} \right)}{n^2 \left( 1 - \frac{6}{n} \right)}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2$$

# Suites divergentes

On dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.

Il y a deux types de suite divergente :

- 1) celles qui ont une limite infinie
- 2) celles qui n'ont pas de limite

## Exemples

1)  $u_n = n$  (on écrit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ )

$v_n = -2n + 1000$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ )

2)  $a_n = (-1)^n$ , suite alternée

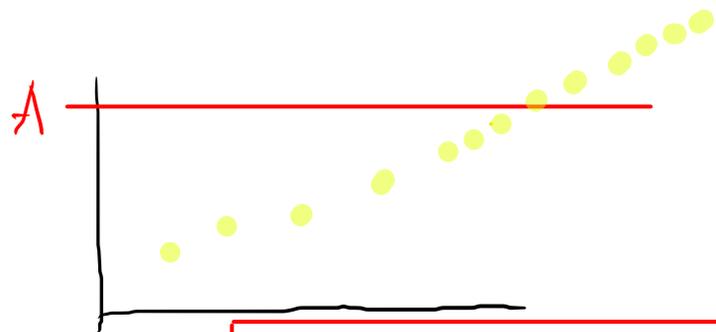
$$d_n = \frac{3n + 2n(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \sin(n\pi)$$

## Limite infinie

Une suite réelle  $(a_n)$  diverge vers  $+\infty$ ,

si pour tout  $A \in \mathbb{R}_+$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  
 $a_n > A$



$$\begin{aligned} a_n &= n \\ A &= 1000 & N &= 1001 \end{aligned}$$

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Une suite réelle  $(b_n)$  diverge vers  $-\infty$ , si pour  
tout  $A \in \mathbb{R}_-$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $b_n < A$

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

# Théorème des deux gendarmes

---

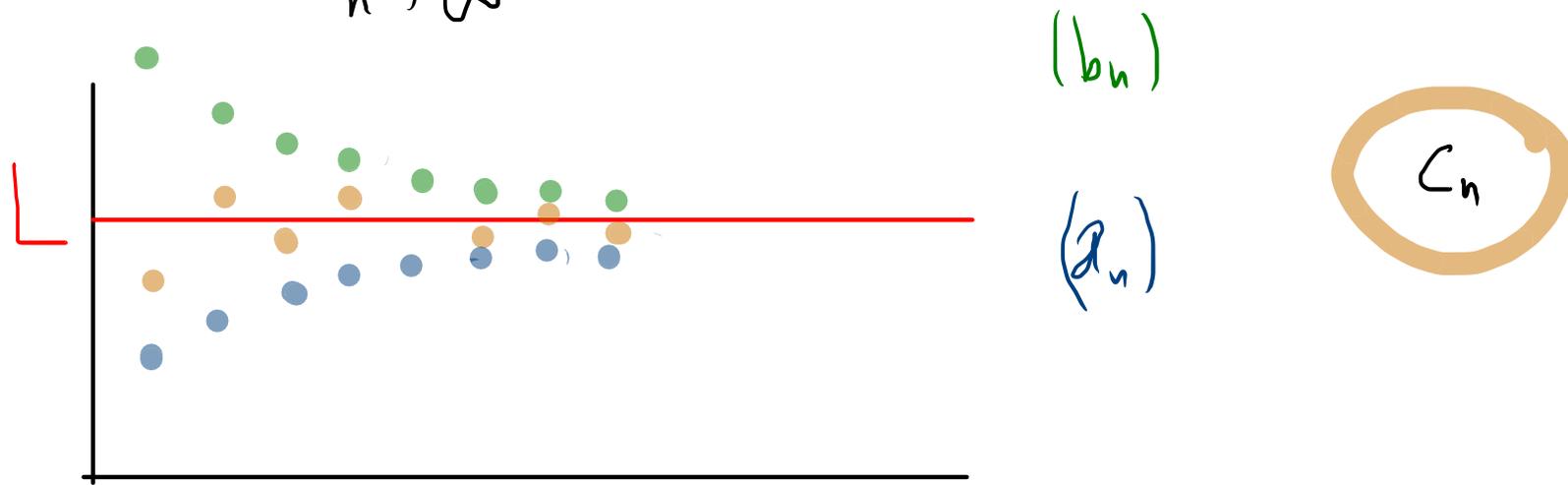
Soit  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  trois suites telles que

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

$$3) a_n \leq c_n \leq b_n, \text{ pour tout } n$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$



2.4.7 A l'aide du théorème des deux gendarmes, calculer :

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Considérons les suites  $z_n = \frac{K}{n^2}$ ,  $K \in \mathbb{R}$  |

Toutes ces suites convergent vers 0

$$\begin{array}{ccc} \frac{-1}{n^2} & \leq & \frac{\cos(n)}{n^2} \leq & \frac{1}{n^2} \\ \downarrow & & & \downarrow \\ 0 & & & 0 \end{array}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$