29.08.19

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w &= 7-4i \\ (1+i)z - iw &= 2+i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ (1+i)z - iw = 2+i \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} w \\ i \\ (2-i) \end{array} \right.$$

Propriétés $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

① $a + bi = 0 \iff a = b = 0$

② $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

③ $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

④ $$\frac{a+bi}{c+di} \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$z = a + bi$, on note $\bar{z} = a - bi$ le conjugué de z

$\overline{4-3i} = 4 + 3i$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

⑤ $a + bi = c + di \iff a = c$ et $b = d$

1.1.5 Déterminer le conjugué des nombres complexes ci-dessous :

a) $z_1 = 5 - 4i$

b) $z_2 = -8 - i$

c) $z_3 = 2 + 3i$

d) $z_4 = 5 - \frac{3}{2}i$

$z_4 = 5 - \frac{3}{2}i$

$\overline{z_4} = 5 + \frac{3}{2}i$

1.1.6 Calculer $(7-8i)\overline{(8-7i)} - \overline{(4+3i)}(4-2i)$.

$$(7-8i)(8+7i) - (4-3i)(4-2i) =$$

$$56 - 64i + 49i + 56 - (16 - 8i - 12i - 6) = 102 + 5i$$

1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$\Im(z)\, y$; $\Re(z) = x$

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

c) $2\Im(\bar{z} + 1) + 2i\Re(-z + 2) = -1 - 12i$

a) $8(x+yi) + 5(x-yi) = 4 + 3i$

$$13x + \boxed{3y}\,i = 4 + \boxed{3}\,i$$

$$\begin{cases} 13x = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{4}{13} \\ y = 1 \end{array}$$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}$

$z = x + yi \quad ; \quad \bar{z} = x - yi$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 + 2xyi + 2x - 2yi = -5$

$(x^2 - y^2 + 2x) + 2(xy - y)i = -5 + 0i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = -5 \\ 2(xy - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = -5 \\ y(x-1) = 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ 1 - y^2 + 2 = -5 \end{cases}$$

$\Delta = 4 - 20 < 0$

Système impossible

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\sqrt{8} \\ \quad = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Deux solutions $1 + 2\sqrt{2}i$ et $1 - 2\sqrt{2}i$

$S = \{ 1 - 2\sqrt{2}i \; ; \; 1 + 2\sqrt{2}i \}$

Partie réelle $\mathcal{R}$ ou partie imaginaire

$$\mathcal{R} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a+bi \longmapsto a$$

$$\mathcal{I} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a+bi \longmapsto b$$

$$\mathcal{R}(-4+18i) = -4$$
$$\mathcal{I}(-4+18i) = 18$$

c) $2\,\Im(\bar{z}+1) + 2i\,\Re(-z+2) = -1-12i$

$$z = x + yi \quad , \quad \bar{z} = x - yi$$

$$2 \cdot \Im(x - yi + 1) + 2i\,\Re(-x - yi + 2) = -1 - 12i$$

$$2 \cdot \Im(x + 1 - yi) + 2i\,\Re(-x + 2 - yi) = -1 - 12i$$

$$2(-y) + 2i(-x+2) = -1 - 12i$$

$$-2y + (-2x+4)i = -1 - 12i$$

$$\begin{cases} -2y = -1 \\ -2x + 4 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{array}$$

La solution $z = 8 + \frac{1}{2}i$

1.1.8 Soit z un nombre complexe. Démontrer que

$$(1)\ z + \bar{z} = 2\,\Re(z), \quad (2)\ z - \bar{z} = 2\,\Im(z)\,i \quad \text{et} \quad (3)\ z\bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$$

$z = x + yi$

$\bar{z} = x - yi$

(1) $z + \bar{z} = 2x = 2\,\Re(z)$

(2) $z - \bar{z} = 2yi = 2\,\Im(z)\,i$

(3) $z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$

Deux autres propriétés :

$z = a + bi \quad , \quad w = c + di$

④ $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$

$= \overline{z} + \overline{w}$

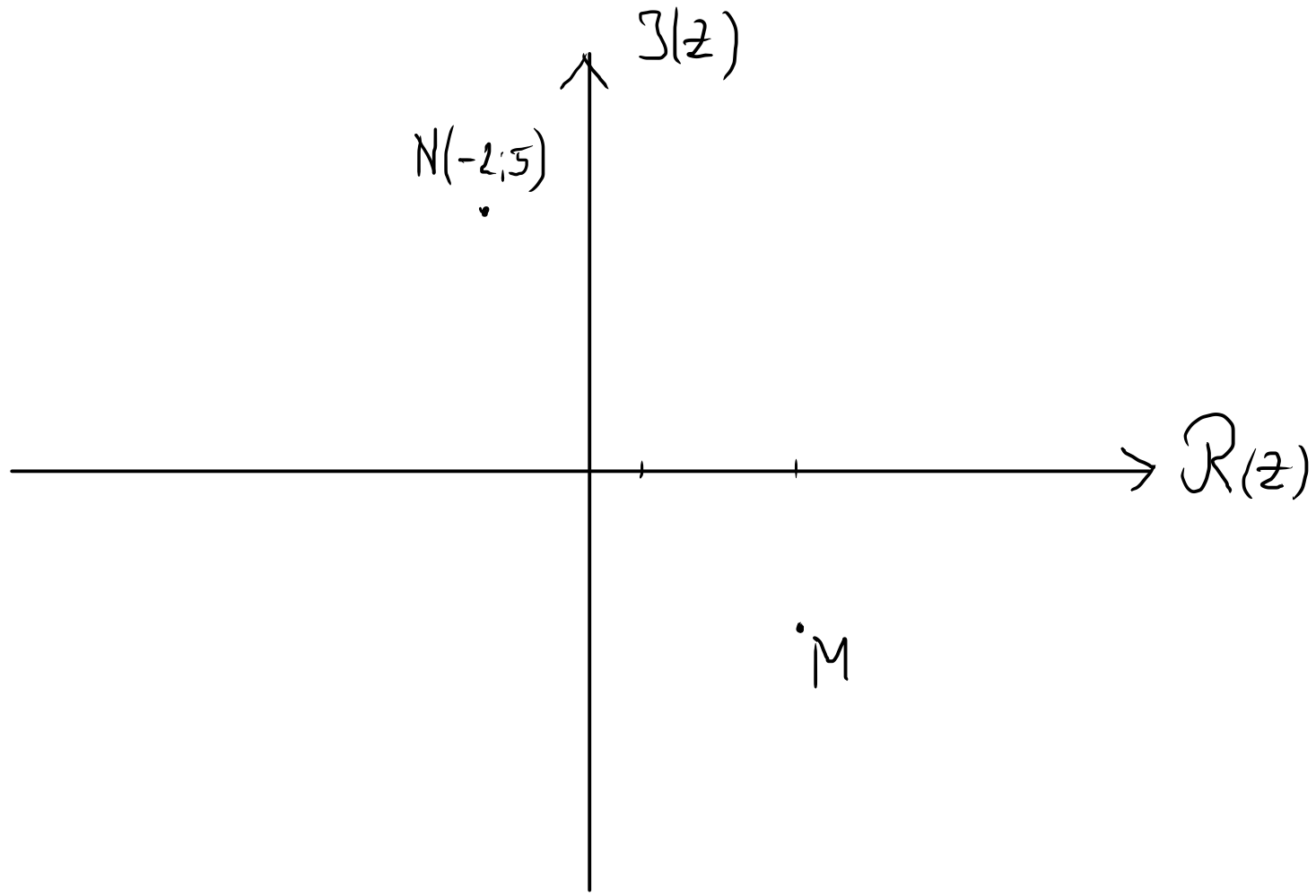
⑤ $\overline{zw} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$

$= ac - bd - (ad + bc)i$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$

Donc $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Représentation géométrique des nombres complexes



$$z = 4 - 3i \longmapsto M(4;-3)$$

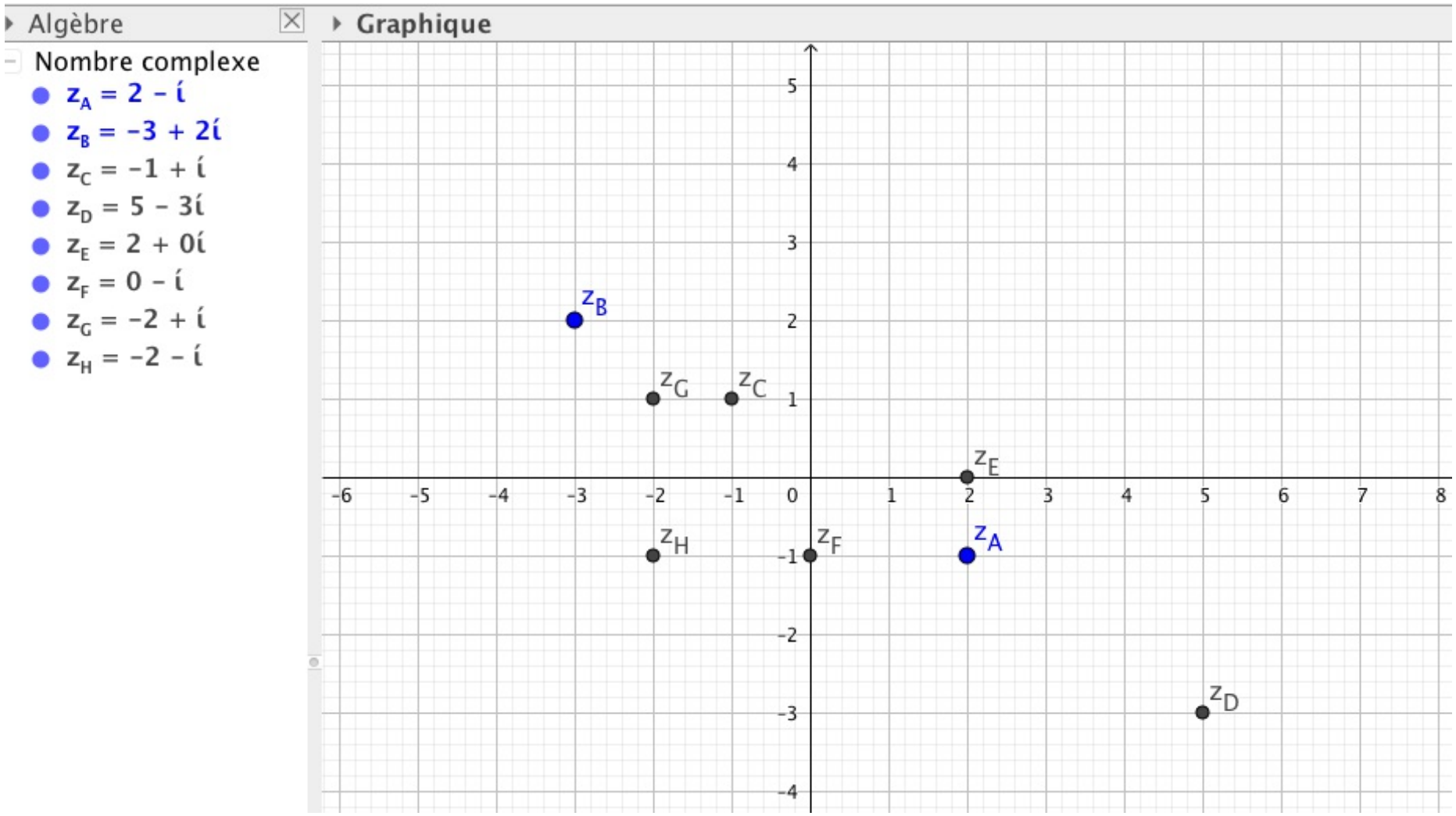
$$-2+5i \longmapsfrom N(-2;5)$$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \quad \text{Plan de Gauss}$$

$$z = a+bi \longmapsto (a, b)$$

$$z \longmapsto (\Re(z), \Im(z))$$

1.2.1


Algèbre
Nombre complexe
$z_A = 2 - i$
$z_B = -3 + 2i$
$z_C = -1 + i$
$z_D = 5 - 3i$
$z_E = 2 + 0i$
$z_F = 0 - i$
$z_G = -2 + i$
$z_H = -2 - i$
Graphique
z_B
z_G
z_C
z_E
z_H
z_F
z_A
z_D