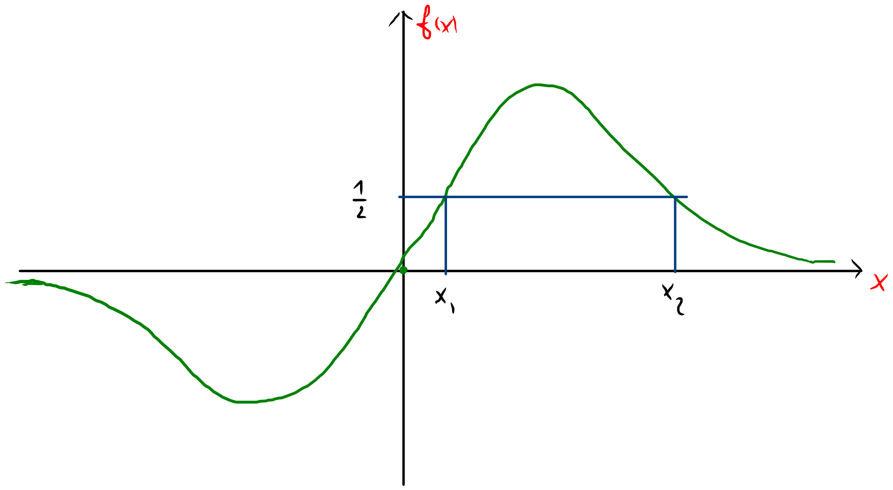
31.10.19

2.3.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?
b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$.
c) Montrer que la restriction $g : [-1\,;1] \to [-1\,;1]$, définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.



$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{\cancel{x}(2)}{\cancel{x}(x+\frac{1}{x})}$$

Non surjectif : $\frac{2x}{1+x^2} = 100$ $\qquad f(x) = 100$ pas de sol

$$2x = 100x^2 + 100$$

$$100x^2 - 2x + 100 = 0 \qquad \Delta < 0$$

Non injectif : $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}$

$$2x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12$$

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} \qquad x_2 = \frac{4+\sqrt{12}}{2}$$

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^3$$

$$\boxed{f(a) = f(b)} \iff a = b$$

$$a^3 = b^3$$

$$a^3 - b^3 = 0$$

$$\underbrace{(a-b)}_{a=b}\underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} f: A & \longrightarrow & B \\ \cap & & \cap \\ X & & Y \end{array}$$

$$f(x) = y$$

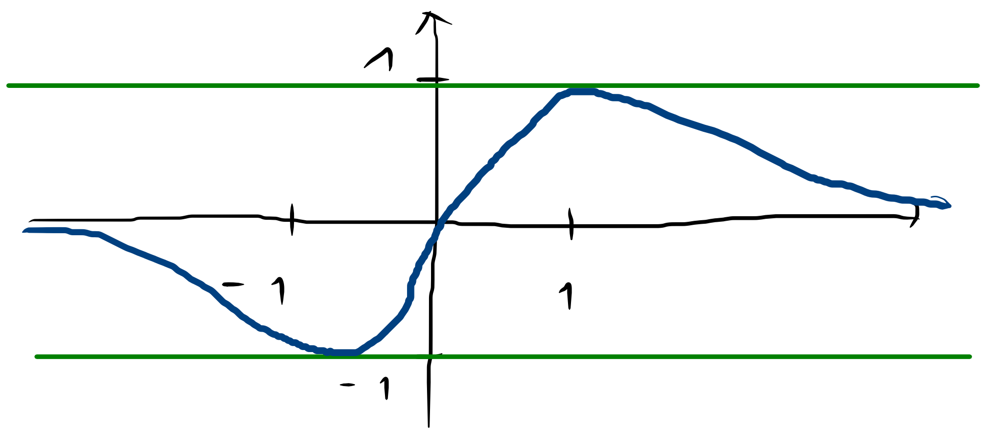
2.3.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

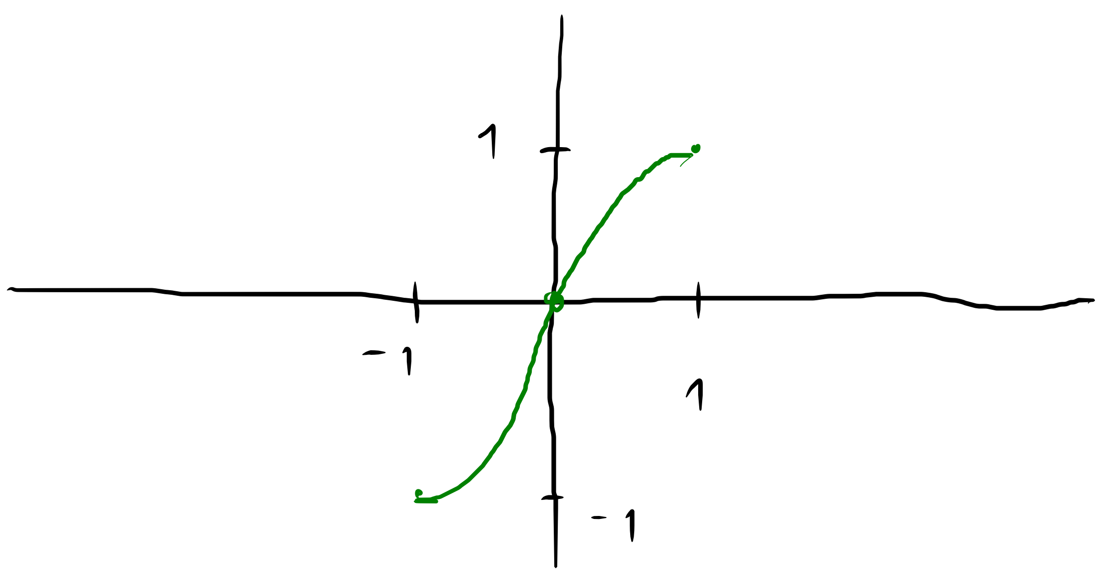
b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,;\,1]$.

c) Montrer que la restriction $g : [-1\,;\,1] \to [-1\,;\,1]$, définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;1]$

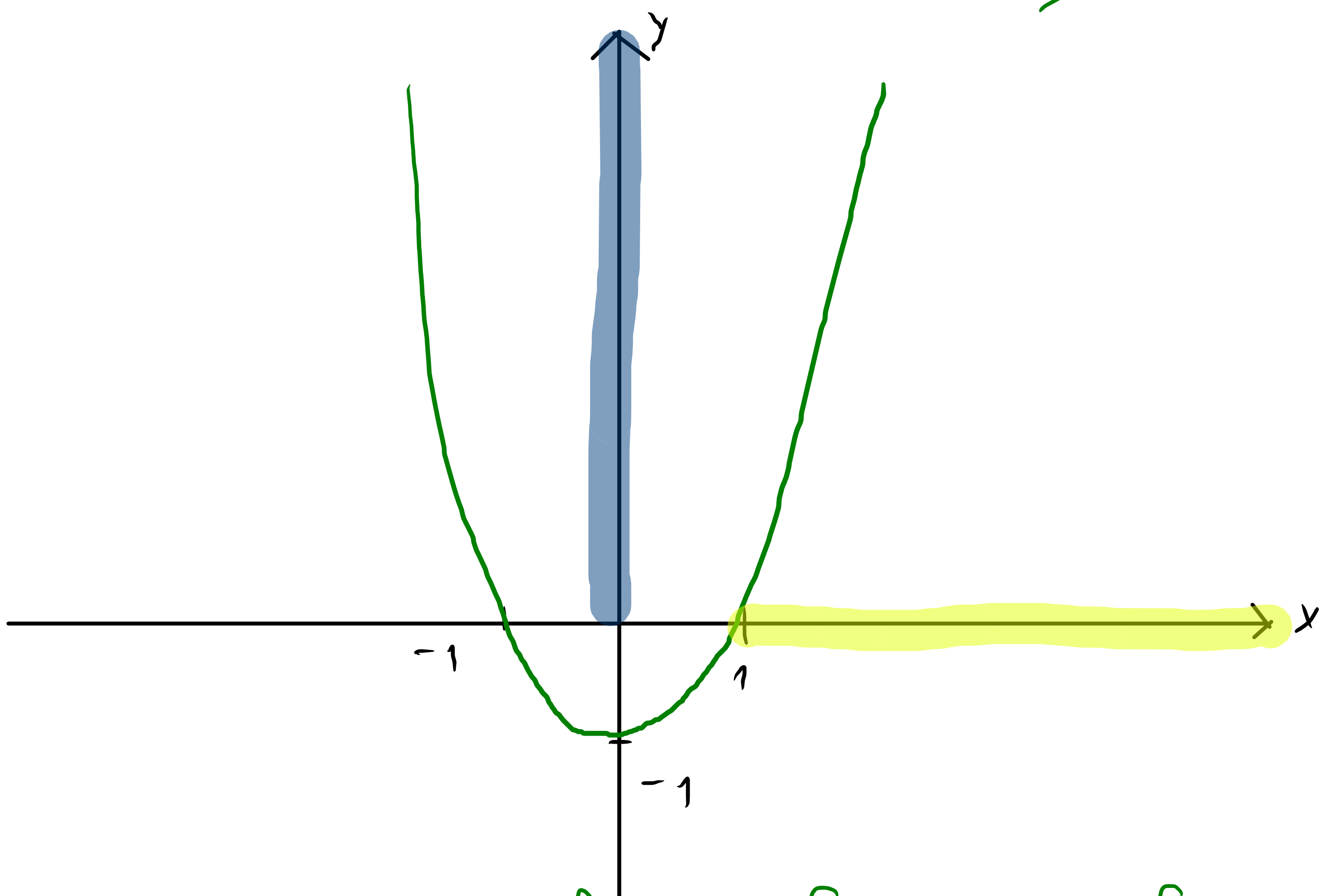


$f(1) = 1 \;;\quad f(-1) = -1$



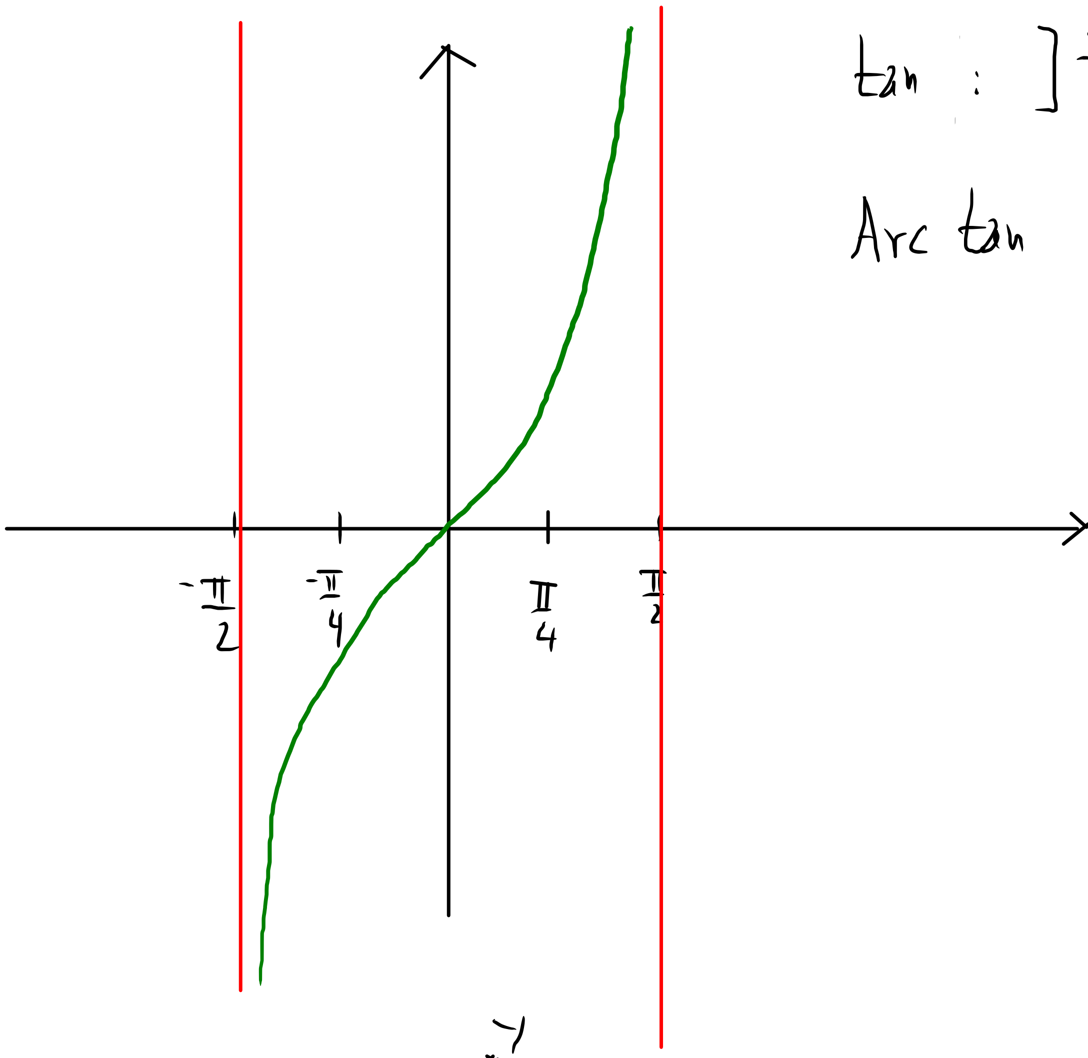
2.3.5 Soit $f : [1\,; +\infty[\to [0\,; +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

Oui



$f : [0; +\infty[\longrightarrow [-1; +\infty[$

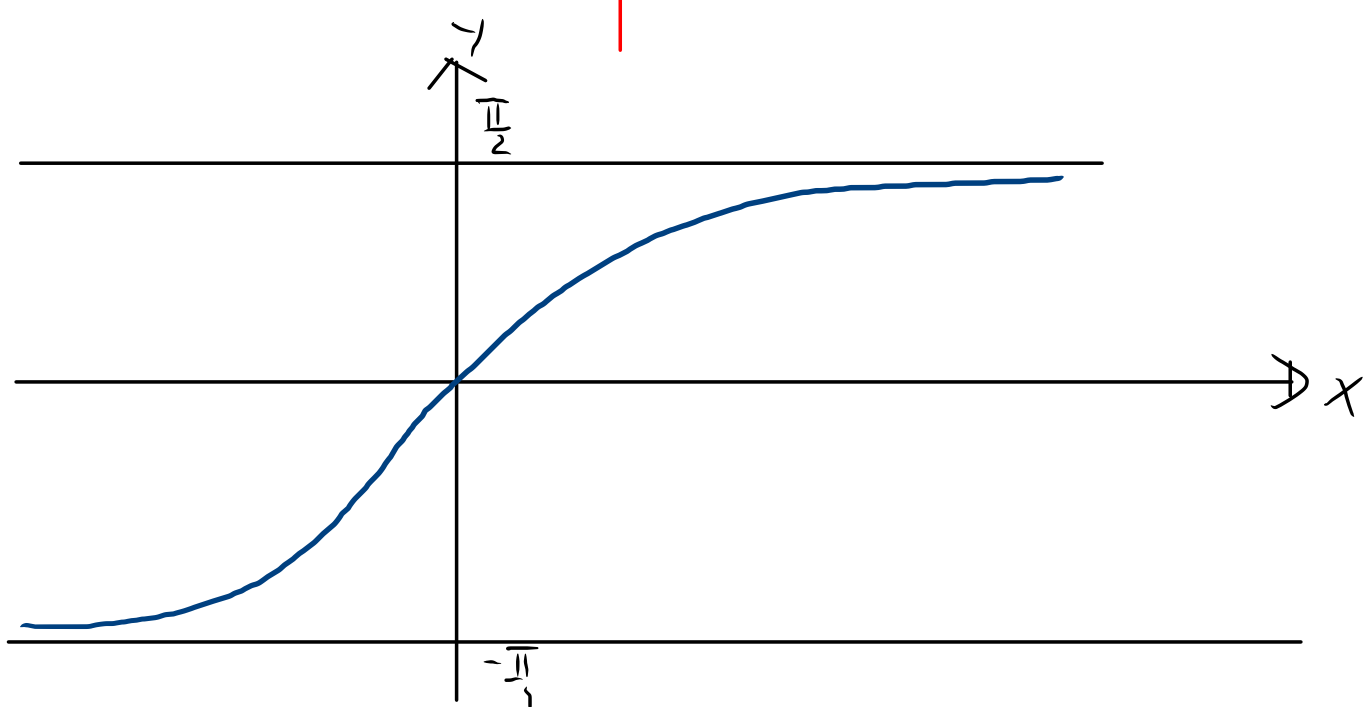
e) $f(x) = \tan(x)$



$\tan : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathrm{Arctan} \quad \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\quad x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$



Les racines

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de a, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre positif r tel que $r^n = a$.

$$\boxed{r^n = a \iff r = \sqrt[n]{a}} \qquad r \geq 0$$

1) $\sqrt[n]{1} = 1$

2) $\sqrt[1]{a} = a$

3) $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

4) $\sqrt[4]{81} = 3$

5) $\sqrt[3]{1000} = 10$

Puissances à exposant rationnels

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. On définit

1) $$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

2) $$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

3) $$a^{\frac{np}{nq}} = a^{\frac{p}{q}} \quad , \text{ avec } n \in \mathbb{Z}^*$$

$$8^{\frac{20}{30}} = 8^{\frac{\cancel{10}\cdot 2}{\cancel{10}\cdot 3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$$

3bis) $$\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$2^{1.2} = 2^{\frac{12}{10}} = 2^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{2^6} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^6$$

1
4
9
16

4.1.8 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{243}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{300}$ f) $\sqrt{54}$

g) $\sqrt{125}$ h) $\sqrt{147}$ i) $\sqrt{80}$ j) $\sqrt{1'000}$ k) $\sqrt{250}$ l) $\sqrt{7'000}$

m) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$ n) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4'000} - 5\sqrt{10}$

a) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

m) $3\sqrt{5} - 4 \cdot 2\sqrt{5} + 5 \cdot 3\sqrt{5} - 3 \cdot 4\sqrt{5} =$

$3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

4.1.9 Effectuer et réduire :

a) $(9\sqrt{12}+3)(\sqrt{3}+8)$ b) $(4\sqrt{3}+\sqrt{45})(\sqrt{5}-2\sqrt{27})$

c) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{3}+1)^4$

a) $9\sqrt{36}+72\sqrt{12}+3\sqrt{3}+24=$

$54+144\sqrt{3}+3\sqrt{3}+24=$

$78+147\sqrt{3}$

c) $\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $a,b\geq 0$

$\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{9-8}=1$

d) $(\sqrt{3}+1)^4=\left((\sqrt{3}+1)^2\right)^2=(4+2\sqrt{3})^2=28+16\sqrt{3}$

4.1.12 Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ e) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$