Exercice 1.2.13 a)

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \quad , \text{ pour } \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} U_k^2 = U_n \cdot U_{n+1}$

① vraie pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} U_k^2 = 1^2 = 1$

$$U_1 \cdot U_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

② Supposons que la relation est vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^2 = U_n \cdot U_{n+1} \implies \sum_{k=1}^{n+1} U_k^2 = U_{n+1} \cdot U_{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} U_k^2}_{U_n \cdot U_{n+1}} + U_{n+1}^2 = U_n \cdot U_{n+1} + U_{n+1}^2$$

$$= U_{n+1} \left(U_n + U_{n+1} \right) = U_{n+1} \cdot (\underbrace{U_{n+1} + U_n}_{U_{n+2}})$$

$$= U_{n+1} \cdot U_{n+2}$$

Ce qui prouve le résultat