Exercice 1.2.13 c)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$

Ce qui s'écrit également :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

si $\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, alors

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi_1^n - \phi_2^n \right)}$$

Démontrons ce résultat par récurrence sur n :

① vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \, \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$$

② Supposons le résultat vrai pour n et démontrons-le pour $n+1$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi_1^n - \phi_2^n \right) \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi_1^{n+1} - \phi_2^{n+1} \right)$$

Il faut remarquer (!) que $\phi_1^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{4+2(1+\sqrt{5})}{4}$

$$= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi_1$$

et $\phi_2^2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = 1 + \phi_2$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi_1^{n+1} - \Phi_2^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi_1^2 \cdot \Phi_1^{n-1} - \Phi_2^2\,\Phi_2^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+\Phi_1)\,\Phi_1^{n-1} - (1+\Phi_2)\,\Phi_2^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi_1^{n-1} - \Phi_2^{n-1} + \Phi_1^{n} - \Phi_2^{n}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi_1^{n-1} - \Phi_2^{n-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi_1^{n} - \Phi_2^{n}\right)}_{\text{par hyp de récurrence}}$$

$$= u_{n-1} + u_n \underset{\text{par déf}}{=} u_{n+1}$$

Ce qui prouve le résultat.