Exercice 16f

f) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ est divisible par 133

① $n=1$: $11^3 + 12^3 = 3059 = 133 \cdot 23$ ok

② $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ est divisible par 133 $\Rightarrow$

$11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3}$ est divisible par 133.

$\exists K \in \mathbb{N}^*$ tel que $12^{2n+1} + 11^{n+2} = 133K$.

$$12^{2n+3} + 11^{n+3} = 12^2 \cdot \underbrace{12^{2n+1}}_{133K - 11^{n+2}} + 11^{n+3} =$$

$$144 \cdot \left(133K - 11^{n+2}\right) + 11^{n+3} = 133 \cdot \underbrace{144K}_{K'} - 144 \cdot 11^{n+2} + 11^{n+3}$$

$$= 133K' - \underbrace{11^{n+2}}_{-K''}\left(\underbrace{144 - 11}_{133}\right) = 133\left(K' + K''\right)$$

qui est divisible par 133.

La relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$