Exercice 1.2.3

$n^3 - n$ est divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{N}$

Ⓐ Par récurrence

① Vraie pour $n = 0$: 0 est divisible par 3

② Supposons la relation vraie pour n et démontrons la pour $n+1$.

$\exists K \in \mathbb{N}$ tel que $n^3 - n = 3K \Rightarrow n^3 = 3K + n$

D'où $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n = (3K + n) + 3n^2 + 2n$$

$$= 3K + 3n^2 + 3n = 3(n^2 + n + K).$$

Finalement $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3

Ⓑ Preuve directe

$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$

$(n-1), n, (n+1)$ sont 3 entiers consécutifs. L'un d'eux est donc un multiple de 3. Ce qui montre que $n^3 - n$ est divisible par 3.