Exercice 1.2.4

Montrons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Procédons par récurrence :

① vraie pour $n = 1$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

② Supposons le résultat vrai pour n et démontrons-le pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

Ce qui démontre le résultat