Exercice 1.2.6

$$\sum_{K=1}^{n} (2K-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+n^2$$

n impair

K	1	2	3	4	5	6
Σ	1	10	35	84	165	286

Supposons que $\displaystyle\sum_{K=1}^{n} (2K-1)^2 = \frac{an^3+bn^2+cn+d}{1}$

$$\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \end{array} \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=10 \\ 27a+9b+3c+d=35 \\ 64a+16b+4c+d=84 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \\ \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 7a+3b+c=9 \\ 19a+5b+c=25 \\ 37a+7b+c=49 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ 1 \\ \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \qquad \begin{cases} 12a+2b=16 \\ 18a+2b=24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a+b=8 \\ 9a+b=12 \end{cases}$$

$a+b+c+d=1$

$3a=4$

$a=\frac{4}{3}$

$$a=\frac{4}{3},\ b=0,\ c=-\frac{1}{3},\ d=0$$

$\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{3}n=\frac{4n^3-n}{3}$ semble être la formule cherchée.

Démontrons par récurrence que

$$\sum_{K=1}^{n} (2K-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

① vraie pour $n=1$: $1 \overset{?}{=} \frac{4 \cdot 1 - 1}{3} = 1$ OK

② Supposons le résultat vrai pour n et démontrons-le pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3} + \left(2(n+1)-1\right)^2$$

$$= \frac{4n^3-n}{3} + (2n+1)^2$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1) \cdot n}{3} + (2n+1)^2$$

$$= (2n+1)\left[\frac{n(2n-1)}{3} + 2n+1\right] = (2n+1)\frac{2n^2-n+6n+3}{3}$$

$$= (2n+1)\frac{2n^2+5n+3}{3} = \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2(n+1)-1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{3}$$

Comme la relation est vérifiée pour $n+1$, elle est vérifiée pour tout n.