

Exercice 1

Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$, alors, $\exists x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $xd = a$ et $yd = b$, x, y premiers entre eux, ie $\text{pgcd}(x, y) = 1$.

- $a - b = xd - yd = (x - y)d$, donc d divise $a - b$.
 - réciproquement si d divise b et $a - b$, alors il divise également $(a - b) + b = a$.
-

Exercice 2

Montrons que $d = \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$ avec $a = bq + r$

$\exists x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $xd = a$ et $yd = b$, avec $\text{pgcd}(x, y) = 1$

Donc $r = a - bq = xd - ydq = d(x - yq)$. Donc d divise r .

Réciproquement si d divise b et r , alors il existe l et m tels que $b = ld$ et $r = md$.

Ainsi : $a = bq + r = ldq + md = d(lq + m)$. d est un diviseur de a

Exercice 3

a) Utilisons l'exercice 1 (a et b sont proches)

$$\begin{aligned} \text{pgdc}(1050, 735) &= \text{pgdc}(735, 315) = \text{pgdc}(420, 315) \\ &= \text{pgdc}(315, 105) = \text{pgdc}(210, 105) = \text{pgdc}(105, 105) = 105 \end{aligned}$$

Utilisons l'exercice 2:

$$1050 = 1 \cdot 735 + 315$$

$$735 = 2 \cdot 315 + 105 \quad \Rightarrow \quad \text{pgdc}(1050, 735) = 105$$

$$315 = 3 \cdot 105 + 0$$

$$\text{b)} \quad 105 = 735 - 2 \cdot 315$$

$$= 735 - 2 \cdot (1050 - 735) = 3 \cdot 735 - 2 \cdot 1050$$

Exercice 4

$$\text{pgcd}(4539, 1958) = \text{pgcd}(2581, 1958) = \text{pgcd}(1958, 623) =$$

$$\text{pgcd}(1335, 623) = \text{pgcd}(712, 623) = \text{pgcd}(623, 89) = \text{pgcd}(534, 89) =$$

$$\text{pgcd}(445, 89) = \text{pgcd}(356, 89) = \text{pgcd}(267, 89) = \text{pgcd}(178, 89) = \text{pgcd}(89, 89) = 89$$

cette méthode est peu appropriée car,

$$4539 = 2 \cdot 1958 + 623$$

$$1958 = 3 \cdot 623 + 89 \quad \rightarrow \quad \text{pgcd}(4539, 1958) = 89$$

$$623 = 7 \cdot 89 + 0$$

Exercice 5

$$59 = 2 \cdot 27 + 5$$

$$27 = 5 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{pgcd}(59, 27) = 1$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(27 - 5 \cdot 5) = 5 - 2(27 - 5 \cdot (59 - 2 \cdot 27))$$

$$= (59 - 2 \cdot 27) - 2 \cdot 27 + 10(59 - 2 \cdot 27)$$

$$= 59 - 2 \cdot 27 - 2 \cdot 27 + 10 \cdot 59 - 20 \cdot 27$$

$$= 11 \cdot 59 - 24 \cdot 27$$

$$(x; y) = (11; -24)$$