Somme et récurrence – TE n° 737

Problème 1 (4 points)

On donne

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 5 \quad \text{et} \quad x_5 = -3$$

Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{3} {x_j}^4$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} (x_i - 2) \cdot x_i$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (4 \cdot x_k)$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x_k - k + 1)$

a) $2^4 + (-4)^4 = \underline{272}$

b) $-1 + 0 + (-6)\cdot(-4) + 3\cdot 5 + (-5)\cdot(-3) = \underline{53}$

c) $4 \sum_k x_k = 4 \cdot 1 = \underline{4}$

d) $(1-1+1) + (2-2+1) + (-4-3+1) + (5-4+1)$
$+ (-3-5+1) = \underline{-9}$

Problème 2 (4 points)

On donne

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 4 \quad \text{et} \quad x_5 = 5$$

$$y_1 = 5, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = -3, \quad y_4 = 2 \quad \text{et} \quad y_5 = 1$$

Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(2 \cdot x_i) - \sum_{j=1}^{5}(3 \cdot y_j)$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} {y_j}^2 - \left(\sum_{k=1}^{5} x_k\right)^2$

a) $2 \sum_i x_i - 3 \sum_j y_j = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 9 = -9$

b) $25 + 16 + 9 + 4 + 1 - 9^2 = 55 - 81 = -26$

Problème 3 (3 points)

Soit $z_1, \ldots, z_n$ une suite finie de nombres réels. Calculer $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(z_i - z_{i-1})$

Justifier le résultat.

$$\sum_{i=2}^{n} z_i - z_{i-1} = (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1})$$

$$= z_n - z_{n-1}$$

Problème 4 (4 points)

Traduire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

a) $1 + 5 + 25 + \cdots + 5^n$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{102}{103}$

a) $\sum_{k=0}^{n} 5^k$

b) $\sum_{k=1}^{102} \frac{k}{k+1}$

Problème 5 (2 points)

Voici une **proposition** et sa **démonstration**

Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4^n + 1 \text{ est divisible par } \quad 3$$

Démonstration

Démontrons cette proposition par récurrence.
En effet, supposons la propriété vraie au rang n : $4^n + 1$ est divisible par 3.
Il existe donc un entier relatif k tel que $4^n + 1 = 3\,k$, soit $4^n = 3\,k - 1$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 1 &= 4^n \cdot 4 + 1 \\ &= 4(3\,k - 1) + 1 \\ &= 3 \cdot 4\,k - 4 + 1 \\ &= 3 \cdot 4k - 3 \\ &= 3 \cdot (4\,k - 1) \end{aligned}$$

Ainsi $4^{n+1} + 1 = 3 \cdot (k - 1)$ est un multiple de 3. **cqfd**

Trouver l'erreur commise dans la démonstration ci-dessus.

La proposition est fausse pour $n = 1$:

3 ne divise pas 5

Il y a aussi une 2ème erreur,

$4^{n+1} + 1 = 3(4k - 1)$

Problème 5 (4 points)

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

$P(n)$: $3^{2n} - 1 = 8k$

1) $P(0)$: $3^0 - 1 = 0$ est un multiple de 8

2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$3^{2n} - 1 = 8k \Rightarrow 3^{2n} = 8k + 1$

$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 9 \cdot 3^{2n} - 1$

$\underset{\text{Réc}}{=} 9 \cdot (8k+1) - 1 = 8 \cdot 9k + 9 - 1 = 8 \cdot 9k + 8$

$= 8(9k+1)$ qui est un multiple de 8.

Problème 7 (4 points)

Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^k = \frac{5 + (4\,n - 1)\,5^{n+1}}{16}$$

1) Montrons que ce résultat est vrai pour $n = 1$:

- $\sum_{k=1}^{1} k\,5^k = 5$
- $\frac{5 + (4\cdot 1 - 1)\cdot 5^{1+1}}{16} = \frac{5 + 3\cdot 25}{16} = \frac{80}{16} = 5$

La formule est vraie pour $n = 1$.

2) Supposons la formule vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 5^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\cdot 5^k} + (n+1)\,5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1)\,5^{n+1}}{16} + (n+1)\,5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1)\,5^{n+1} + 16(n+1)\,5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + [(4n-1) + 16(n+1)]\,5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + [4n - 1 + 16n + 16]\,5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + [20n + 15]\,5^{n+1}}{16} = \frac{5 + 5(4n+3)\,5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (4n + 4 - 1)\,5^{n+2}}{16} = \frac{5 + (4(n+1) - 1)\,5^{n+2}}{16}$$