1.1.13 On considère une suite de n nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Écrire les expressions suivantes de la manière la plus synthétique possible à l'aide d'un symbole de sommation.

a) La somme des termes de cette suite de nombres.

b) La somme des carrés des termes de cette suite de nombres

c) Le carré de la somme des termes de cette suite de nombres

d) La différence entre la somme des carrés et le carré de la somme des termes de cette suite de nombre

a) $x_1, \ldots, x_n = (x_k)_{k=1}^{n} = (x_k)$

$$\boxed{S_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} = \sum_{j=-1}^{n-2} x_{j+2}$$

b) $S_2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

$S_2 \neq S_1^2$

c) $S_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$

x_1, x_2, x_3 : $\sum_{k=1}^{3} x_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

1.1.14 On considère deux suites de n nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Écrire les expressions suivantes de la manière la plus synthétique possible.

a) Produit de la somme des x_i et de la somme des y_i

b) Somme des produits $x_i \, y_i$

c) Somme des y_i moins k fois la somme des x_i

a) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

c) $$\sum_{i=1}^{n} y_i - k \sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.1.17 Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ des nombres réels et $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - m^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i m + m^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i m + \sum_{i=1}^{n} m^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i + m^2$$

1.1.17 Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ des nombres réels et $\boxed{m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - m^2$$

Variance

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i m + m^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2x_i m + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^2$$

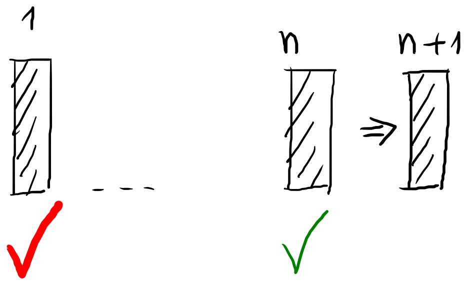
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2m\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}} + m^2\frac{1}{n}\underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} 1}}_{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2m^2 + m^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - m^2$$

1.2.1

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



① Démontrons que la formule est vraie pour $n = 1$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$
- Formule : $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

② Supposons le résultat vrai pour n et démontrons-la pour $n+1$

On sait que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2} = \boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

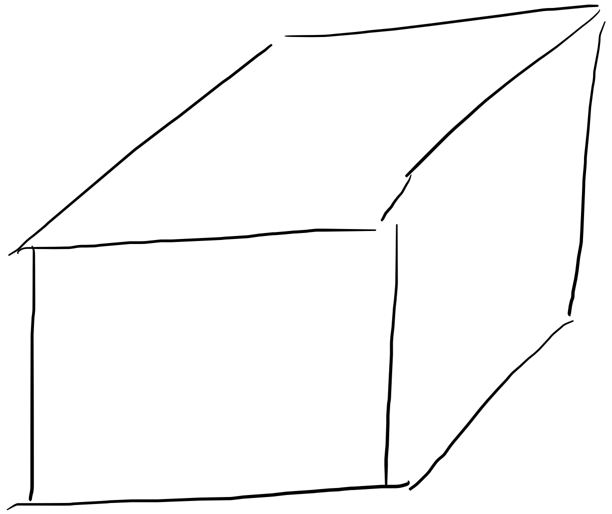
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} + (n+1)^2 \underset{\text{de réc.}}{\overset{\text{par hyp}}{=}} \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6}$$

cqfd



$P(n)$ les n chaussettes sont de la même couleur

1) $P(1)$ ✓

vraie

2) 1 2 … n $n+1$

$P(n)$

vraie