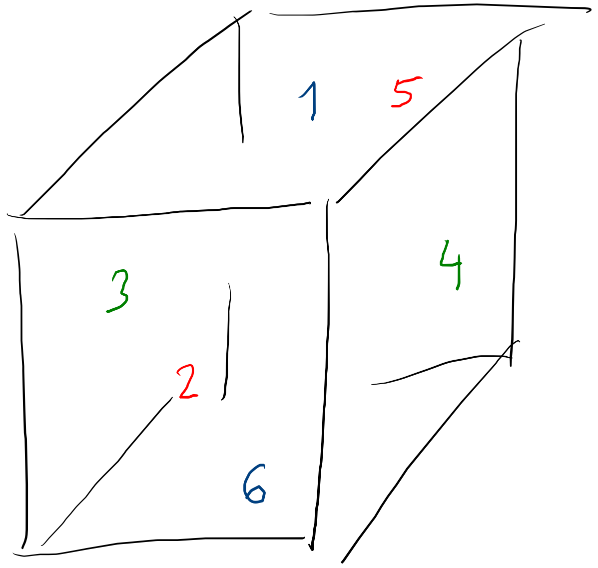
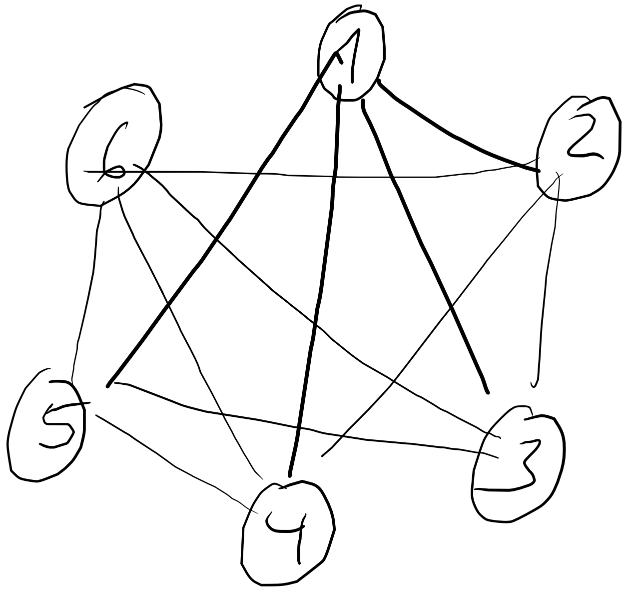
Théorie des graphes





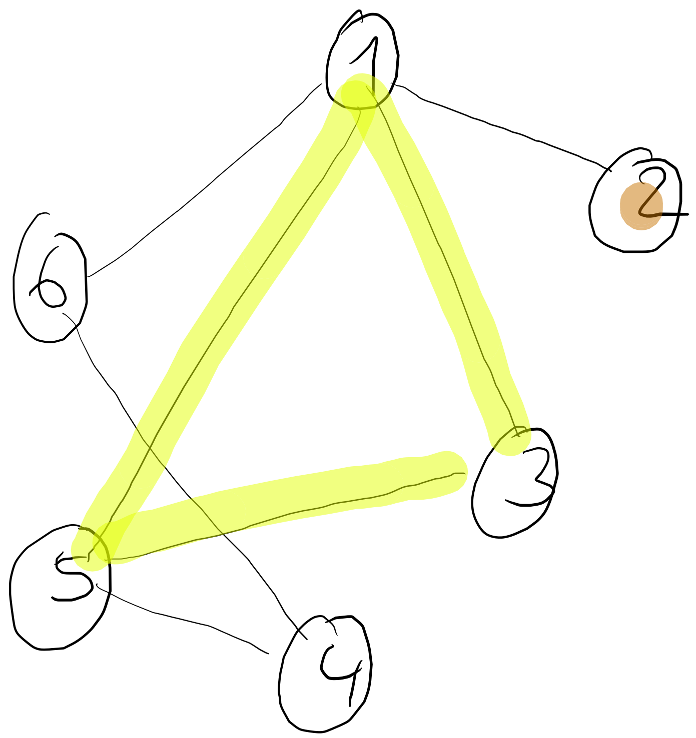
3.1.4 On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant.

Deux wagons `i` et `j` peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.

Dessiner un graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe.

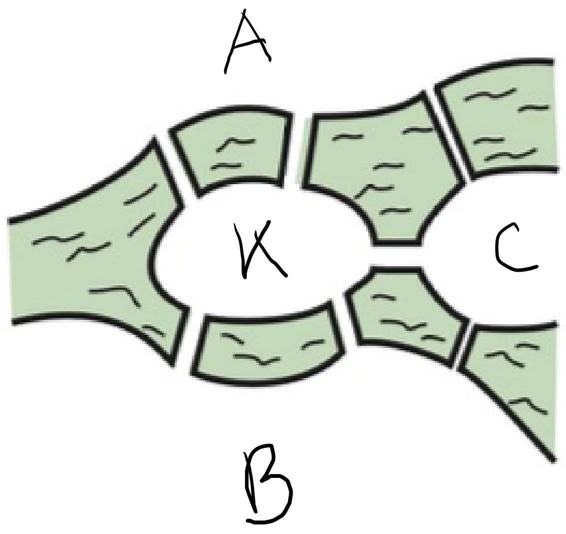
Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

4 1 6 3 5 2

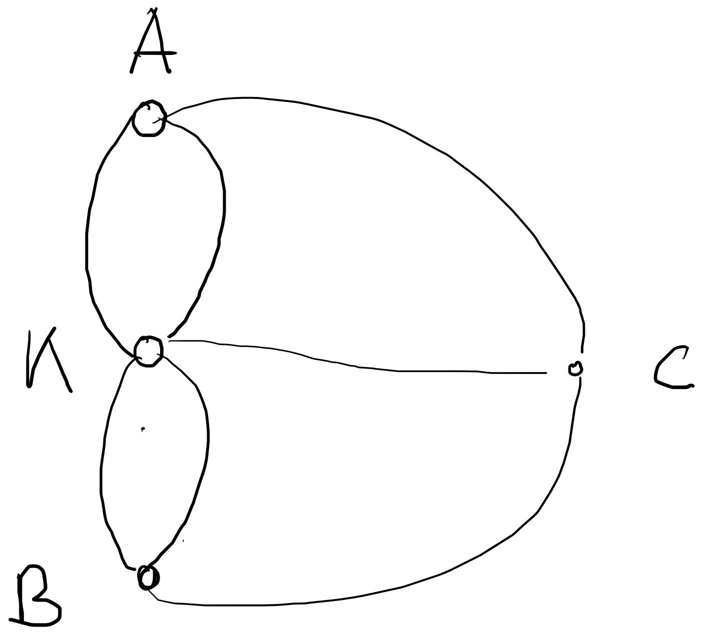


6 5 4 3 2 1

3.1.5 (Les sept ponts de Königsberg)



a)



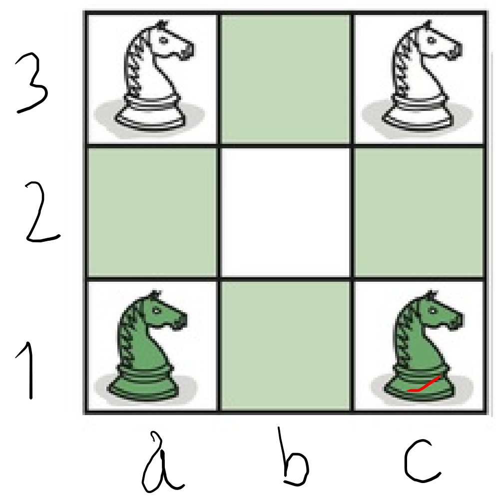
4 sommets

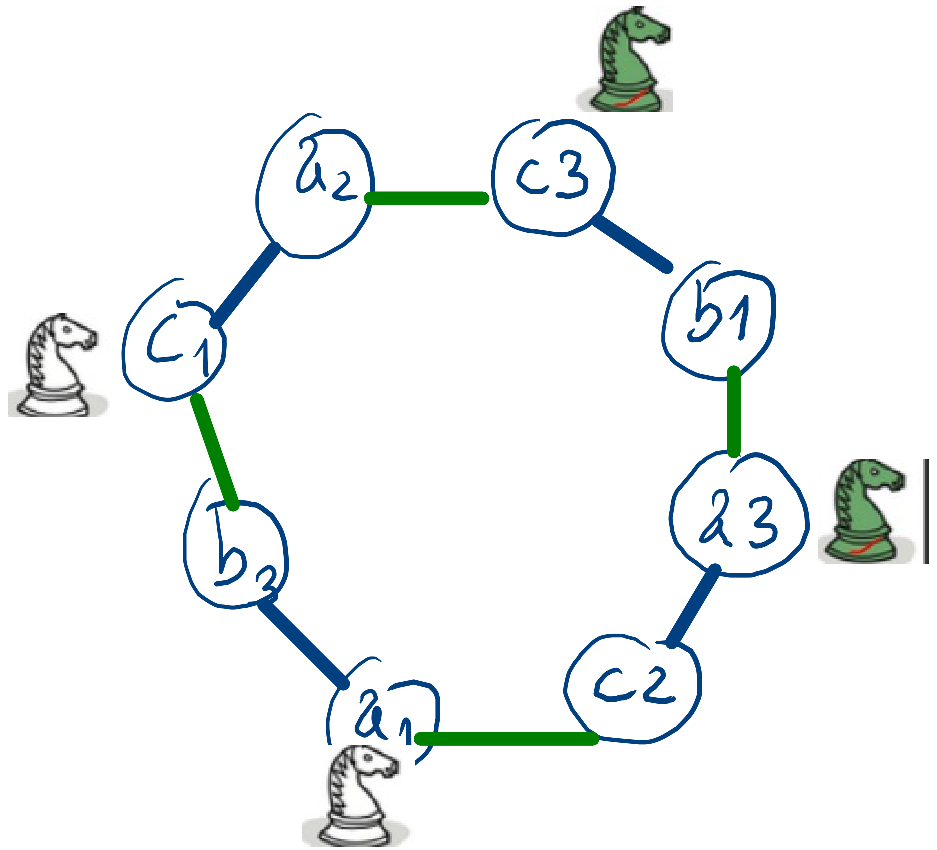
7 arêtes

non

b) chacun des points A, B, C et K permet d'accéder à un nombre impair de ponts (les arêtes) : 3 ou 5

Si la région d'arrivée est la même que la région de départ, cela veut dire que le nombre d'entrées et de sorties en chacun des points est obligatoirement un nombre pair ! Ce qui n'est pas le cas.





c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2

b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3

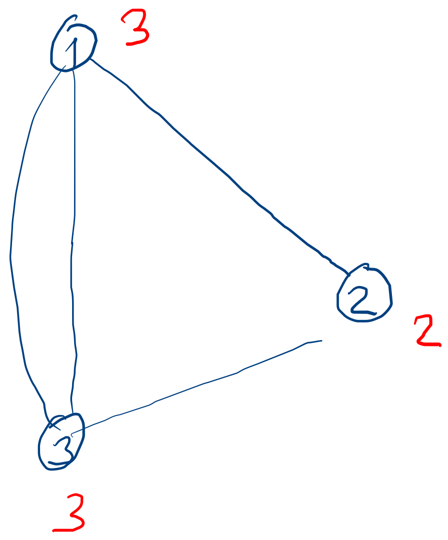
C3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2

b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3

16 coups

3.1.7 Démontrer le **théorème des poignées de main** : La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois.
Cette somme est égale à deux fois le nombre d'arêtes



$$\boxed{\sum_{v \in G} d(v) = 2E}$$

vertice Edge

Corollaire

Dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est un nombre pair.

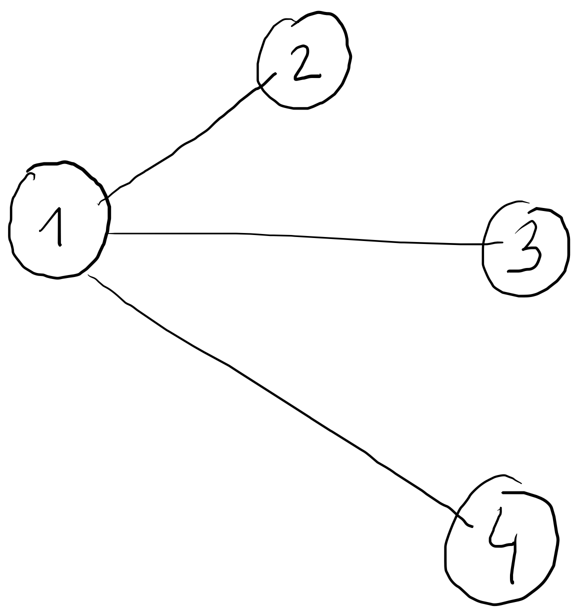
En effet, soit p la somme des degrés des sommets pairs et i la somme des degrés des sommets impairs

$S = p + i$ est la somme des degrés des sommets

S est pair

$$\underset{\text{pair}}{S} = \underbrace{\underbrace{p_1 + p_2 + \dots + p_k}_{p}}_{\text{pair}} + \underbrace{i_1 + i_2 + \dots + i_q}_{i} \Rightarrow q \text{ est pair}$$

3.1.8 Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

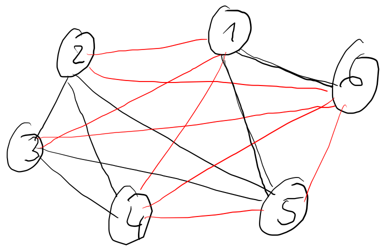


3.1.9 Montrer que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).

Montrer que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

Construisons un graphe dont les sommets sont les personnes.

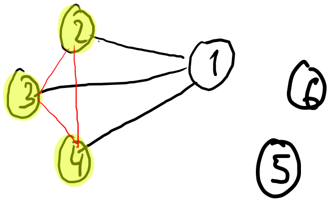
- 2 sommets sont reliés en noir : les personnes se connaissent
- en rouge : les personnes ne se connaissent pas

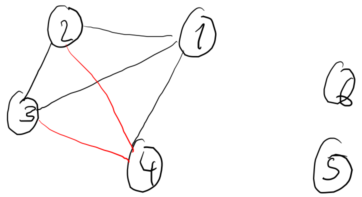


Ne tenons pas compte des couleurs, on obtient K6 le graphe complet à 6 sommets.

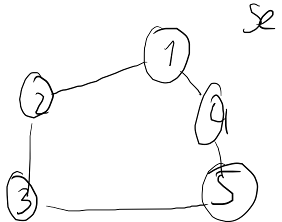
De chaque sommet partent 5 arêtes, et au moins 3 d'entre elles sont de même couleur (noire ou rouge).

Considérons K_4 : 1 2 3 4

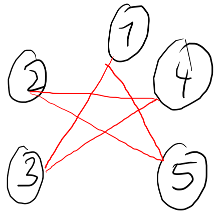




Par contre, dans K_5, on peut trouver deux graphes partiels complémentaires sans K3



se connaissent



se connaissent pas