

Symbole de Sommation

27.09.19

Euler

$$(17) + (8) + (4) = 29$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 29 = \sum_{k=1}^3 x_k = \sum_{j=1}^3 x_j = \sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, \dots, x_n = 1000$$

$$0 + 2 + 4 + \dots + 1000 = ?$$

$$\sum_{k=1}^n x_k$$

somme

$\sum$ symbole de sommation

1.1.1 On donne

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 2 \quad \text{et} \quad x_5 = 7.$$

Calculer :

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^5 x_k$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^5 (x_i + 8)$$

$$\text{b) } \sum_{i=2}^4 x_i$$

$$\text{d) } \sum_{j=1}^5 x_j^3$$

$$\text{f) } \sum_{k=1}^5 (8 \cdot x_k)$$

$$\text{a) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{l=1}^5 x_l$$

1.1.2 On donne

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 2 \quad \text{et} \quad x_5 = 7.$$

On donne également

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 8, \quad y_3 = 3, \quad y_4 = 1 \quad \text{et} \quad y_5 = 6.$$

$$\text{i) } \sum_{i=1}^4 (x_{i+1} + y_i) = \underset{i=1}{\overset{x_2}{5} + \overset{y_1}{2}} + \underset{i=2}{\overset{x_3}{6} + \overset{y_2}{8}} + \underset{i=3}{\overset{x_4}{2} + \overset{y_3}{3}} + \underset{i=4}{\overset{x_5}{7} + \overset{y_4}{1}}$$

1,1,1

a) $\sum_{i=1}^5 x_i$

c) $\sum_{k=1}^5 x_k$

e) $\sum_{i=1}^5 (x_i + 8)$

b) $\sum_{i=2}^4 x_i$

d) $\sum_{j=1}^5 x_j^3$

f) $\sum_{k=1}^5 (8 \cdot x_k)$

d) $\sum_{j=1}^5 x_j^3 \neq \left(\sum_{j=1}^5 x_j \right)^3$

e) $\left(\sum_{i=1}^5 x_i \right) + 40$

f) $\sum_{k=1}^5 8x_k = 8 \cdot \left(\sum_{k=1}^5 x_k \right)$

1.1.3 Développer les sommes suivantes

a) $\sum_{i=0}^n (-1)^i$

b) $\sum_{j=0}^n 3j$

c) $\sum_{k=1}^n n$

d) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{i}$

a) $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

i: 0 1 2 3 4 5

b) $\sum_{j=0}^n 3j = 3 \left(\sum_{j=0}^n j \right) = 3(0 + 1 + 2 + \dots + n)$

c) $\sum_{k=1}^n n = \underbrace{n + n + \dots + n}_{n \times} = n \cdot n = n^2$

d) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n}$

$n=2: \frac{2}{1} + \frac{2}{2} = 3$

$n=3: \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = 3 + 1,5 + 1 = 5,5 = \frac{11}{2}$

$n=4: \frac{4}{1} + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4} = 4 + 2 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{25}{3}$

$n=5: \frac{5}{1} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} + \frac{5}{5} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} + 1 = \frac{60+30+20+15+12}{12} = \frac{137}{12}$

1.1.4 Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ , en faisant disparaître ce symbole :

a) $\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$

b) $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$

c) $\sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!}{k}$

a) $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100}$
 $k = 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$

```
>>> from fractions import Fraction
>>> s = 0
>>> for k in range(3, 11):
>>>     s += Fraction(1, k**2)

>>> s
Fraction(380729, 1270080)
>>>
```

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{21}$

c) $\sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!}{k} = \frac{2!}{1} + \frac{3!}{2} + \frac{4!}{3} + \frac{5!}{4}$
 $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

1.1.5 Développer et calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=0}^n 1$

d) $\sum_{m=0}^3 (m^2 - 6m + 9)$

g) $\sum_{k=1}^5 \frac{k+2}{k}$

2) $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$
i : 0 1 2 n