

Examen oral : exercice 12

Problème 1

Le polynôme

$$P(x) = x^3 + 3i \cdot x^2 + (5i - 9) \cdot x - 12i$$

admet $x = -3$ comme zéro. Factoriser complètement ce polynôme.

Problème 2

On considère la famille de fonctions donnée par

$$f_m(x) = \sqrt{4 + 4m - mx}$$

Montrer que le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de Ox de la partie du graphe de f_m située dans le premier quadrant ($\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$) est donné par :

$$V(m) = \frac{8\pi \cdot (m+1)^2}{m}$$

Déterminer la valeur de m pour que $V(m)$ soit minimal.

$$1) P(-3) = -27 + 27i - 15i + 27 - 12i \quad \Rightarrow \quad x+3 \text{ / } P$$

Par Horner:

	1	3i	5i-9	-12i
-3		-3	-9i+9	12i
	1	-3+3i	-4i	0

$$P(x) = (x+3) \underbrace{(x^2 + (-3+3i)x - 4i)}_{P_1(x)}$$

$$\Delta P_1 = (-3+3i)^2 - 4 \cdot (-4i) = -18i + 16i = -2i$$

$$(a+ib)^2 = -2i \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 + 2abi = -2i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ 2ab = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1+ti \\ z_2 = 1-i \end{cases}$$

$$x = \frac{3-3i \pm (1-i)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-3i-1+i) = 1-i \\ \frac{1}{2}(3-3i+1-i) = 2-2i \end{cases}$$

$$P(x) = (x+3)(x-(1-i))(x-(2-2i))$$

$$2) \quad 4+4m - mx \geq 0$$

$$mx \leq 4m+4$$

$$1) \quad m > 0 \quad x \leq \frac{4m+4}{m} = 4 \frac{m+1}{m}$$

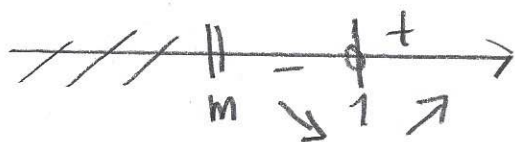
$$2) \quad m < 0 \quad x \geq \frac{4m+4}{m} = 4 \frac{m+1}{m}$$

$$\pi \int_0^{4 \frac{m+1}{m}} (4+4m-mx) dx = \pi \left[(4+4m)x - \frac{m}{2}x^2 \right]_0^{4 \frac{m+1}{m}} =$$

$$4\pi (m+1) \cdot \frac{4(m+1)}{m} - \frac{m}{2} \cdot 16\pi \frac{(m+1)^2}{m^2} = 16\pi \left[\frac{(m+1)^2}{m} - \frac{(m+1)^2}{2m} \right]$$

$$= 16\pi \frac{(m+1)^2}{2m} = \frac{8\pi(m+1)^2}{m}$$

$$V'(m) = 8\pi \frac{2(m+1)m - (m+1)^2}{m^2} = 8\pi \frac{(m+1)[m-1]}{m^2}$$



$V(m)$ est minimal si $m=1$