# Examen oral : exercice 12

### Problème 1

Le polynôme

$$P(x) = x^3 + 3\,i \cdot x^2 + (5\,i - 9) \cdot x - 12\,i$$

admet $x = -3$ comme zéro. Factoriser complètement ce polynôme.

### Problème 2

On considère la famille de fonctions donnée par

$$f_m(x) = \sqrt{4 + 4\,m - m\,x}$$

Montrer que le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de $Ox$ de la partie du graphe de $f_m$ située dans le premier quadrant ($\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$) est donné par :

$$V(m) = \frac{8\pi \cdot (m+1)^2}{m}$$

Déterminer la valeur de $m$ pour que $V(m)$ soit minimal.

1) $P(-3) = -27 + 27i - 15i + 27 - 12i \Rightarrow x+3 \,/\, P$

Par Horner:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 3i & 5i-9 & & -12i \\
-3 & & -3 & -9i+9 & & 12i \\
\hline
 & 1 & -3+3i & -4i & & 0
\end{array}$$

$$P(x) = (x+3)\underbrace{(x^2 + (-3+3i)x - 4i)}_{P_1(x)}$$

$$\Delta P_1 = (-3+3i)^2 - 4\cdot(-4i) = -18i + 16i = -2i$$

$$(\underbrace{a+ib}_{z})^2 = -2i \Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -2i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ ab = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1+i \\ z_2 = 1-i \end{cases}$$

$$x = \frac{3-3i \pm (1-i)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-3i-1+i) = 1-i \\ \frac{1}{2}(3-3i+1-i) = 2-2i \end{cases}$$

$$P(x) = (x+3)\big(x-(1-i)\big)\big(x-(2-2i)\big)$$

2) $4+4m-mx \geq 0$

$$mx \leq 4m+4$$

1°) $m>0$ $\quad x \leq \frac{4m+4}{m} = 4\frac{m+1}{m}$

2°) $m<0$ $\quad x \geq \frac{4m+4}{m} = 4\frac{m+1}{m}$

$$\pi\int_0^{4\frac{m+1}{m}} 4+4m-mx\,dx = \pi\left[(4+4m)x - \frac{m}{2}x^2\right]_0^{4\frac{m+1}{m}} =$$

$$4\pi(m+1)\cdot\frac{4(m+1)}{m} - \frac{m}{2}\cdot 16\pi\frac{(m+1)^2}{m^2} = 16\pi\left[\frac{(m+1)^2}{m} - \frac{(m+1)^2}{2m}\right]$$

$$= 16\pi\frac{(m+1)^2}{2m} = \frac{8\pi(m+1)^2}{m}$$

$$V'(m) = 8\pi\,\frac{2(m+1)m-(m+1)^2}{m^2} = 8\pi\,\frac{(m+1)\,[m-1]}{m^2}$$

| $m$ | | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| | ////// | $\Vert$ $-$ | $0$ | $+$ |
| | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$V(m)$ est minimal si $m=1$