Diagonalisation

Définition 6.1

Une matrice $D=\left(d_{ij}\right)\in M_{nxn}(\mathbb{R})$ est dite **diagonale** si $d_{ij}=0$ pour tout $i\neq j$.

Un endomorphisme h d'un espace vectoriel V de dimension finie est dit **diagonalisable** s'il existe une base de V relativement à laquelle la matrice représentant h est diagonale.

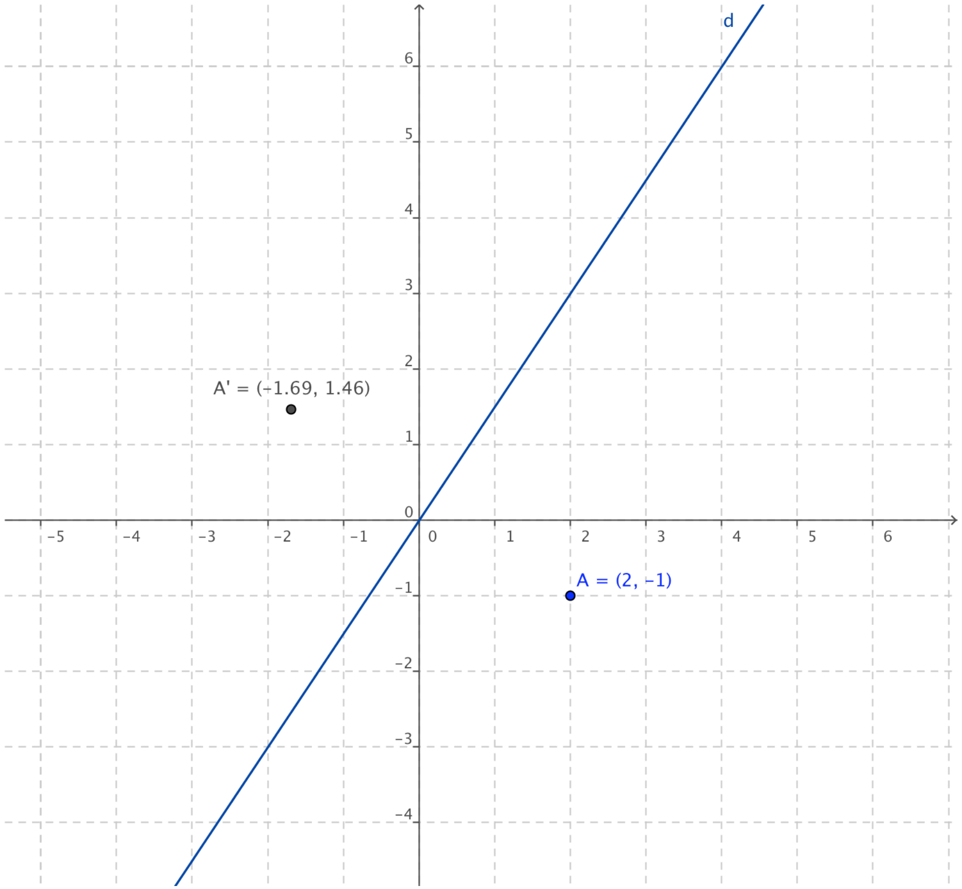
Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, considérons la symétrie axiale d'axe la droite $\left(d\right):3x-2y=0$.

Quelle est la matrice de cette application ?

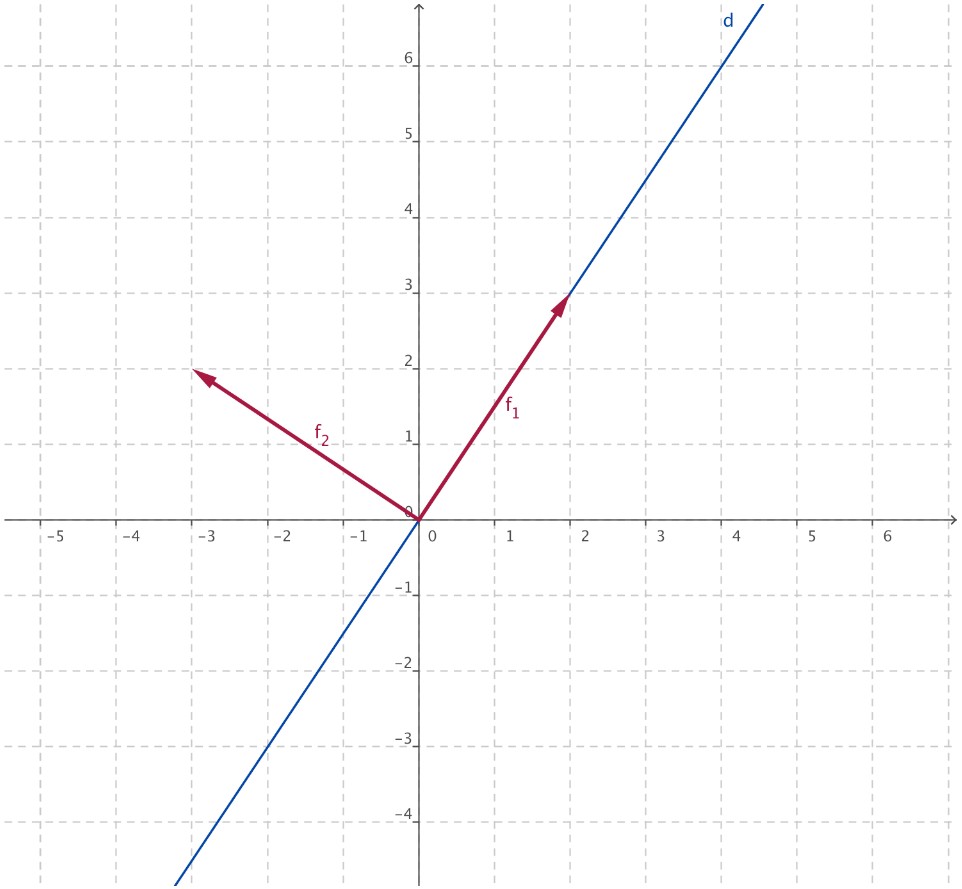
Notons f cette symétrie et B la base canonique.

Nous voyons que $f\left((2;-1)\right) \cong (-1,69;1,46)$.



Si P est un point de d, $f(P) = P$.

Considérons la base $B^* = \left(\left(2;3\right),\left(-3;2\right)\right)$.



$f\left(\left(2;3\right)\right) = \left(2;3\right)$ et $f\left(\left(-3;2\right)\right) = \left(3;-2\right)$.

La matrice de f dans cette base s'écrit : $F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Les matrices de passage s'écrivent $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

$$F = (?)$$

$$\begin{array}{ccccc} & \left(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\right) & \rightarrow & \left(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\right) & \\ P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \uparrow & & \downarrow & P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/13 & 3/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{pmatrix} \\ & \left(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^2}\right) & \rightarrow & \left(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^2}\right) & \end{array}$$

$$F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $F = P \cdot F^* \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$.

Théorème 6.1

Soit V une espace vectoriel de dimension finie et h un endomorphisme de V .

***h* est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de *V* formée de vecteurs propres de *h* .**

Théorème 6.2

Soit V une espace vectoriel de dimension finie m et h un endomorphisme de V .

1) h possède au plus m valeurs propres distinctes.

2) La dimension de l'espace propre E_λ associé à la valeur propre λ est inférieure ou égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.

3) Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes alors les sous-espaces propres correspondants sont tels que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

4) Des vecteurs propres $u_1, u_2, \ldots, u_p$ associés à p valeurs propres distinctes deux à deux forment une famille libre de V .

Corollaire 6.3

Soit V un espace vectoriel de dimension finie m et h un endomorphisme de V .

Si h possède m valeurs propres distinctes, alors h est diagonalisable.

Théorème 6.4

Soit V un espace vectoriel de dimension finie m et h un endomorphisme de V .

Si h admet p valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ distinctes 2 à 2 dont les sous-espaces propres E_{λ_i} sont tels que $\dim\left(E_{\lambda_1}\right) + \ldots + \dim\left(E_{\lambda_p}\right) = m$, alors f est diagonalisable.