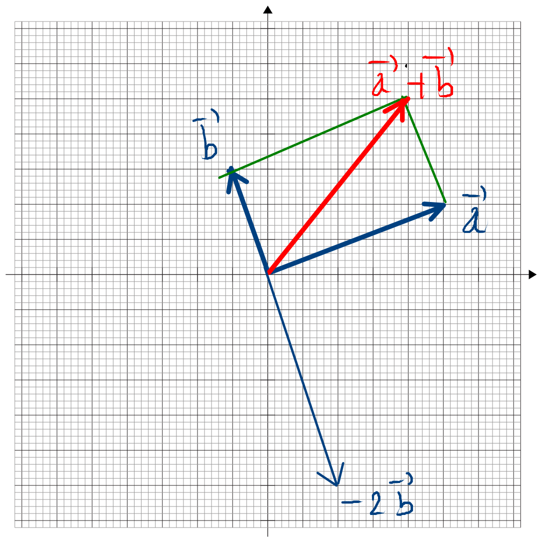
Espace vectoriel

Exemple 1



Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{a} + \vec{b}$ addition

$\vec{a}$ et son opposé $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$\vec{0}$ est le vecteur nul

multiplier $\vec{b}$ par -2

$-2\vec{b}$

On voit que $(V_2, +)$ est un groupe abélien

Exemple L'ensemble des matrices de type 2×2 munit de la multiplication par un réel a la même structure que V_2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \qquad \ldots$$

Définissons la notion d'espace vectoriel réel

Soit V un ensemble non vide muni :

1) d'une loi de composition interne : $+ : V \times V \longrightarrow V$
2) d'une loi de composition externe : $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1) $u + v = v + u$, $\forall\, u, v \in V$ (commutativité)
2) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (associativité)
3) il existe un élément neutre pour $+$: $0_V + u = u, \forall u \in V$
4) tout élément de V est inversible pour $+$: $\forall u \in V$, $\exists\, (-u) \in V$ tq $u + (-u) = 0_V$

1) à 4) définissent une structure de groupe abélien sur V.

5) $1 \cdot u = u \quad \forall\, u \in V$
6) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \mu) \cdot u$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in V$
7) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu \cdot u$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\, u \in V$
8) $\lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, u, v \in V$

Les éléments de V s'appellent les vecteurs.

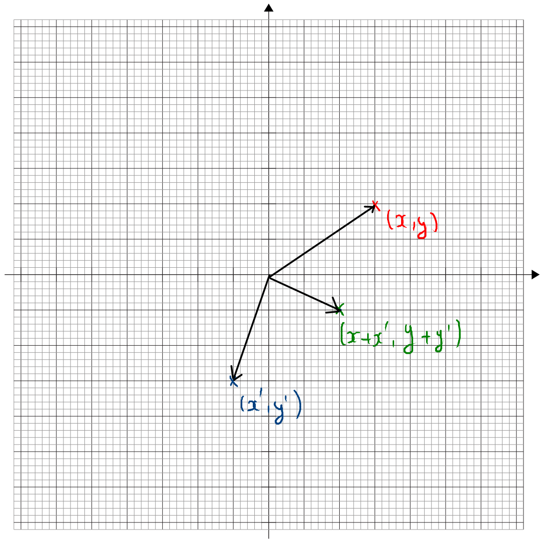
Les éléments de $\mathbb{R}$ s'appellent les scalaires

La définition se trouve à la page 19 des tables de la CRM

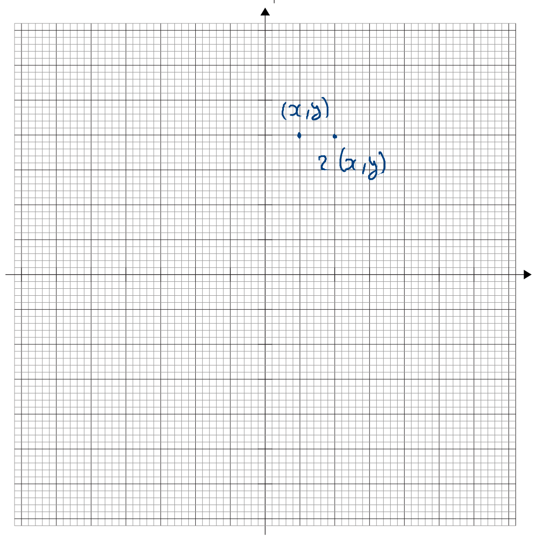
1.2.2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$(x;y)+(x';y') \longmapsto (x+x';y+y')$$

$$\alpha(x;y) \longmapsto (\alpha x;y)$$



$(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe abélien



$2(x,y) = (2x,y)$

7) $(\lambda+\mu)\cdot u$:

$(\lambda+\mu)(x,y) = ((\lambda+\mu)x, y)$

$\lambda(x,y)+\mu(x,y) = (\lambda x,y)+(\mu x,y)$

$= (\lambda x+\mu x, y+y) = ((\lambda+\mu)x, 2y)$

1.2.3

Démontrons que $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ munit de l'addition et de la multiplication par un nombre réel usuelles est un espace vectoriel.

1) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Donc $A + B = B + A \quad , \forall A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

2) $\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ c_2+c_3 & d_2+d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{pmatrix}$

Donc $(A+B) + C = A + (B+C)$

3) L'élément neutre est $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Le symétrique de $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = -A$

$$A + (-A) = 0$$

5) $1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a & 1\cdot b \\ 1\cdot c & 1\cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $1 \cdot A = A$

6) $(\lambda\mu)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu a & \lambda\mu b \\ \lambda\mu c & \lambda\mu d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mu a & \mu b \\ \mu c & \mu d \end{pmatrix}$

$= \lambda\left(\mu\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

Donc $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

7) $\lambda\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] = \lambda\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\lambda a_2 & \lambda b_1+\lambda b_2 \\ \lambda c_1+\lambda c_2 & \lambda d_1+\lambda d_2 \end{pmatrix}$

$\lambda\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a_2 & \lambda b_2 \\ \lambda c_2 & \lambda d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\lambda a_2 & \lambda b_1+\lambda b_2 \\ \lambda c_1+\lambda c_2 & \lambda d_1+\lambda d_2 \end{pmatrix}$

Donc $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

8)

...

1.2.4

1.2.5