2.3.19

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$$

1) ED(f) : • zéro du dén. : $\ln(x) = 1 \iff x = e$

• $\ln(x)$: $x > 0$

$$ED(f) = \mathbb{R}_+^* - \{e\}$$

2) Signe de f : $\ln(x) = 2 \iff x = e^2 \; (\simeq 7{,}39)$

x		0		e		e^2	
$\ln(x) - 2$	//////	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$
$\ln(x) - 1$	//////	‖	$-$	‖	$+$		$+$
$f(x)$	//////	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

3) Aucune parité, ED non symétrique

4) AV ① à droite $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^>} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1} \underset{\text{"}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"}}{\overset{\text{BH ind}}{=}} \lim_{x \to 0^>} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

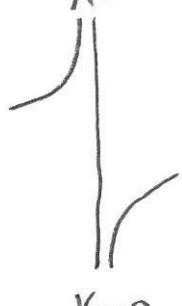
point limite $(0 ; 1)$

② en $x = e$:

$$\lim_{x \to e} f(x) \underset{\text{"}\frac{-1}{0}\text{"}}{=} \infty \implies \text{AV en } x = e$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to e^>} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to e^<} f(x) = +\infty \end{cases}$$

AV



$X = e$

AH ③ à droite :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)-2}{\ln(x)-1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t-2}{t-1} = 1$$

$t = \ln(x)$

$x \to +\infty$ $\ln(x) \to +\infty$

$t \to +\infty$

AHD $y=1$

5) Croissance :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x)-1) - (\ln(x)-2)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$

$ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}_+^* - \{e\}$

Que se passe-t-il en $x=0$?

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}\,\frac{1}{(\underbrace{\ln(x)}_{-\infty}-1)^2} \overset{\text{ind}}{=} \text{"}+\infty\cdot 0\text{"} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2(\ln(x)-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-\frac{1}{x}}{2(\ln(x)-1)} \underset{\text{"}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{1}{x^2}}{2\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{2x} = +\infty$$

On a une tangente verticale en $x=0$ au point $(0,1)$

Croissance : comme $f'(x) > 0$, f est toujours croissante

6) Courbure :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x\,(\ln(x)-1)^2} \right)' \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$\begin{aligned}\left(x\,(\ln(x)-1)^2\right)' &= (\ln(x)-1)^2 + x \cdot 2\,(\ln(x)-1) \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\ln(x)-1)\left[\ln(x)-1+2\right] \\ &= (\ln(x)-1)(\ln(x)+1)\end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{-(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)}{x^2\,(\ln(x)-1)^4} = \frac{-(\ln(x)+1)}{x^2(\ln(x)-1)^3}$$

$ED(f'') = \mathbb{R}^*_+ - \{e\}$

zéro de $f''(x)$: $\ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0{,}37$

x	0		$1/e$		e	
$-(\ln(x)+1)$	//	$+$	0	$-$	‖	$-$
$x^2(\ln(x)-1)^3$	//	$-$		$-$	‖	$+$
$f''(x)$	//	$-$	0	$+$	‖	$-$

Point d'inflexion en $\left(1/e \,;\, \frac{3}{2}\right)$

$$f(e^{-1}) = \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{3}{2}$$

7) Résumé

x	0	$\frac{1}{e}$	e	e^2
$f'(x)$		$+$		$+$
$f''(x)$		$-$ 0 $+$		$-$
$f(x)$		↗ $\boxed{pi}$		↗ 0