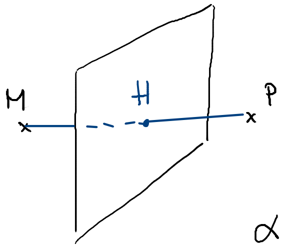
3.7.2

g) plan médiateur de MN : (π) : $2x - y + z + 4 = 0$

plan médiateur de MP : (α) : $5x - y - 2z - 35 = 0$



$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \alpha$$

(α) : $5x - y - 2z + d = 0$

α contient $H(5 ; 2 ; -6)$ milieu de MP

$\Rightarrow 25 - 2 + 12 = -d \Rightarrow d = -35$

$d = \pi \cap \alpha$

$$(d) : \begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ 5x - y - 2z = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -z - 4 \\ 5x - y = 2z + 35 \\ z = t \end{cases} \begin{array}{c|c} y & x \\ \cdot(-1) & \cdot 5 \\ \cdot 1 & \cdot(-2) \end{array}$$

$$(d) : \begin{cases} 3x = 3z + 39 \\ -3y = -9z - 90 \\ z = t \end{cases} \qquad (d) : \begin{cases} x = 13 + t \\ y = 30 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le centre du cercle : $C\left(t+13\,;\,3t+30\,;\,t\right)$

Le rayon : $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 0 - t - 13 \\ 3 - 3t - 30 \\ -4 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-13 \\ -3t-27 \\ -t-4 \end{pmatrix}$

Mieux : $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} t+13 \\ 3t+27 \\ t+4 \end{pmatrix}$

$$\|\overrightarrow{MC}\|^2 = (t+13)^2 + (3t+27)^2 + (t+4)^2$$
$$= 11t^2 + 196t + 914 = 50$$

Résolvons l'équation $11t^2 + 196t + 864 = 0$

$$(11t + 108)(t + 8) =$$

$$t = \begin{cases} -8 & \Rightarrow C_1(5\,;\,6\,;\,-8) \\ -\dfrac{108}{11} & \Rightarrow C_2\left(\dfrac{35}{11}\,;\,\dfrac{6}{11}\,;\,\dfrac{-108}{11}\right) \end{cases}$$

d'où les deux sphères :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\Sigma_1) : (x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50 \\ (\Sigma_2) : \left(x - \frac{35}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{6}{11}\right)^2 + \left(z + \frac{108}{11}\right)^2 = 50 \end{array}}$$

h) elle passe par les points $R(-2;2;3)$, $S(0;4;1)$ et $T(-5;5;-1)$, et a son centre sur le plan d'équation $x+3y=2z+7$.

plan médiateur de RS : $(\alpha) : x+y-z=0$

de RT : $(\beta) : 3x-3y+4z+17=0$

Intersection des 3 plans :

$$\begin{cases} (\alpha) : x+y-z=0 \\ (\beta) : 3x-3y+4z+17=0 \\ (\gamma) : x+3y-2z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases} \quad \boxed{C(-3;4;1)}$$

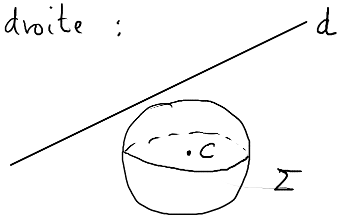
Calcul du rayon : $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|\overrightarrow{CS}\| = 3$

$(\Sigma) : (x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$

3.7.3 Déterminer la position relative de la sphère $\Sigma : (x-3)^2+(y-5)^2+(z-10)^2 = 25$ et de la droite $d : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+4}{-6} = z-5$.

Position entre une sphère et une droite :

1) sécante
2) tangente
3) gauche



$C(3;5;10)$

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Sigma) : (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-10)^2 = 25$$

$D(7;-4;5)$ $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta(d,C) = \dfrac{\|\vec{DC} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

$$\vec{DC} \wedge \vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{DC} \wedge \vec{d}\| = 7\sqrt{73}$$

$\delta(d,C) = \dfrac{7\sqrt{73}}{\sqrt{73}} = 7 > 5$ rayon de Σ

donc Σ et d sont gauches.

3.7.4 Le système d'équations $\left\{\begin{array}{l}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100\\ 2x-2y-z+9=0\end{array}\right.$ détermine-t-il un cercle ? Si oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.