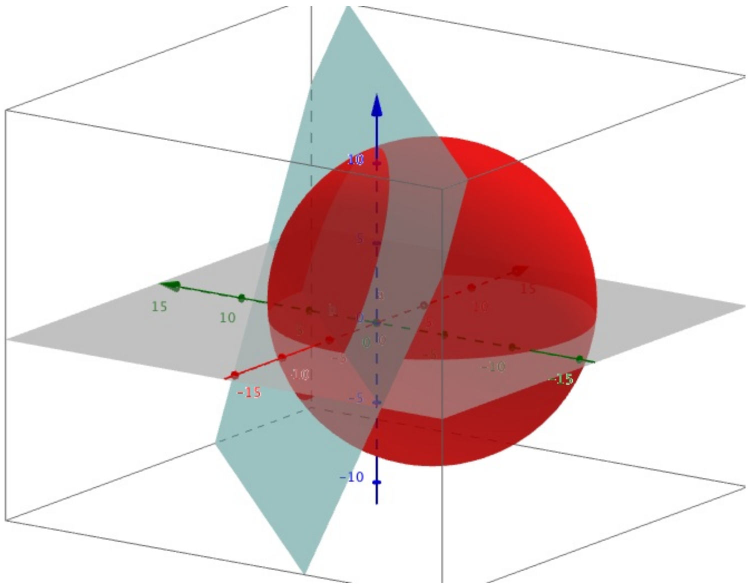
3.7.4 Le système d'équations $\begin{array}{l} (\Sigma) \\ (\alpha): \end{array}\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$ détermine-t-il un cercle ? ~~Si~~ oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

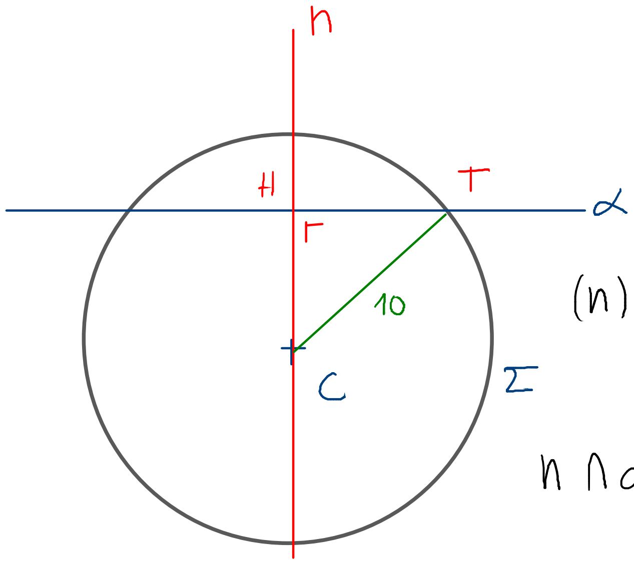


Calculons la distance du centre de Σ au plan :

$$\delta\left(C(3;-2;1),\alpha\right)=\frac{|2\cdot 3-2\cdot(-2)-1+9|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$=\frac{18}{3}=6<10$$

Donc α coupe Σ



Calculons les coordonnées de H, intersection de la normale à α issue de C et de α

$$(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$n \cap \alpha$:

$$2(3+2K) - 2(-2-2K) - (1-K) + 9 = 0$$

$$4K + 6 + 4 + 4K - 1 + K + 9 = 0$$

$$9K = -18$$

$$K = -2 \Rightarrow \boxed{H(-1;2;3)}$$

Le rayon du cercle HT : $HT^2 = CT^2 - CH^2$

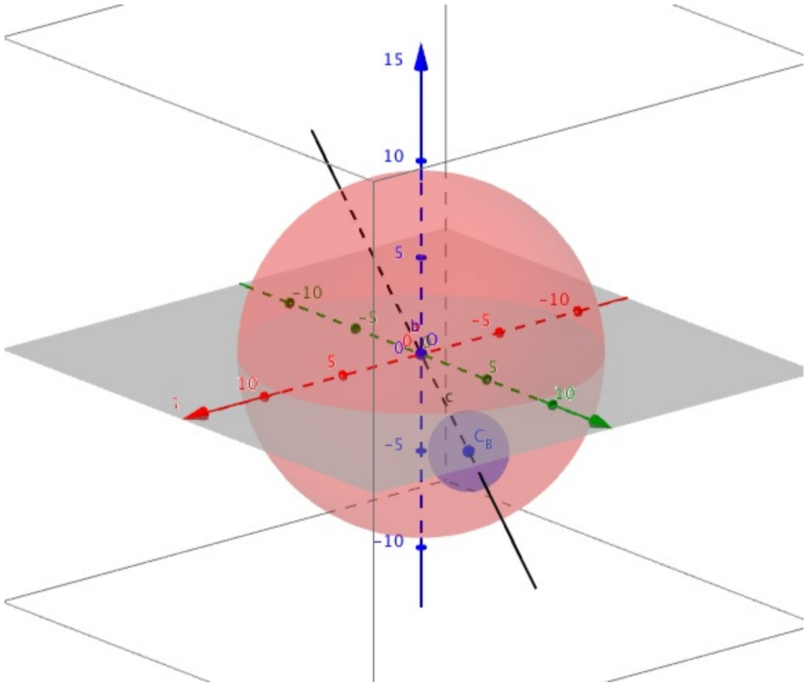
$$HT^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow \boxed{HT = 8}$$

$$\vec{CH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{CH}\|^2 = 36$$

3.7.5 Montrer que les deux sphères d'équations :

$$(\Sigma_1) : \; x^2 + y^2 + z^2 = 81 \qquad \text{et} \quad (\Sigma_2) : \; x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$$

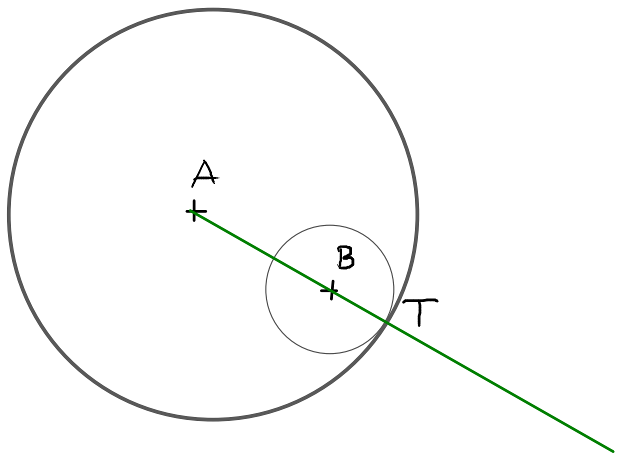
sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.



$\Sigma_1(A, 9)$, $r_1 = 9$ $\quad A(0;0;0)$

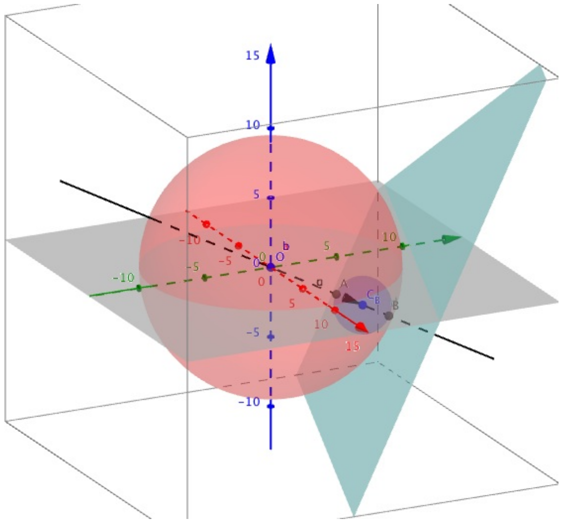
$\Sigma_2(B, 2)$, $r_2 = 3$, $\quad B(2;6;-3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = 7$$



$$\|\overrightarrow{AB}\| + r_2 = r_1$$

$$7 + 2 = 9$$



Déterminons le plan tangent aux deux sphères : soit π ce plan :

$$(\pi) : 2x + 6y - 3z + d = 0$$

Nous savons que $\delta(A, \pi) = 9$

$$\delta(A, \pi) = \frac{|d|}{7} = 9 \Rightarrow |d| = 63 \Rightarrow d = \pm 63$$

$(\pi_1) : 2x + 6y - 3z + 63 = 0$. Calculons $\delta(B, \pi_1)$:

$$\delta(B, \pi_1) = \frac{|2 \cdot (2) + 6 \cdot (6) - 3(-3) + 63|}{7} = \frac{112}{7} = 16$$

$(\pi_2) : 2x + 6y - 3z - 63 = 0$. Calculons $\delta(B, \pi_2)$

$$\delta(B, \pi_2) = \frac{|4 + 36 + 9 - 63|}{7} = \frac{14}{7} = 2$$ C'est le bon !

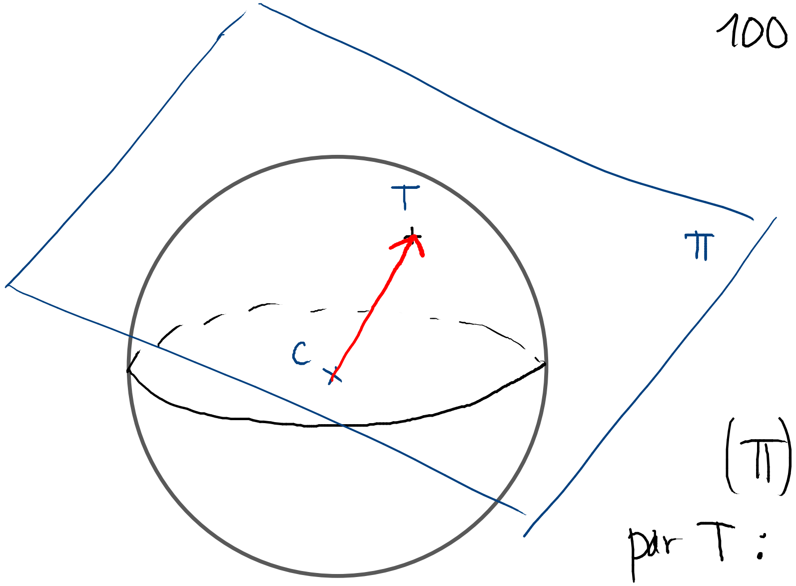
Le plan cherché : $2x + 6y - 3z - 63 = 0$

3.7.6 On donne la sphère Σ et le point T. Après avoir vérifié que T appartient à Σ, trouver l'équation cartésienne du plan tangent à Σ au point T :

a) $\Sigma : (x+3)^2 + (y-15)^2 + (z-2)^2 = 225$ $\qquad T(7;4;4)$, $\qquad C(-3;15,2)$

$T \in \Sigma$: en effet $(7+3)^2 + (4-15)^2 + (4-2)^2 =$

$100 + 121 + 4 = 225$



$\overrightarrow{CT} \perp \pi$

$$\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(\pi) : 10x - 11y + 2z + d = 0$

par T : $70 - 44 + 8 + d = 0 \Rightarrow d = -34$

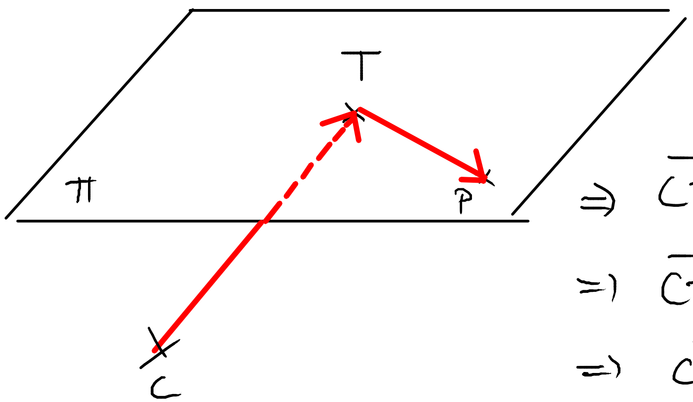
$(\pi) : 10x - 11y + 2z - 34 = 0$

Déterminons le plan tangent à une sphère :

$T(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$

$\Sigma(C, r)$ avec $C(\alpha, \beta, \gamma)$

Soit $P(x, y, z) \in \pi$ le plan cherché :



$$\vec{CT} \perp \vec{TP}$$

$$\Rightarrow \vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{CT} \cdot (\vec{CP} - \vec{CT}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{CT} \cdot \vec{CP} - \vec{CT} \cdot \vec{CT} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{CT} \cdot \vec{CP} = \underbrace{\vec{CT} \cdot \vec{CT}}$$

$$\Rightarrow \vec{CT} \cdot \vec{CP} = \|\vec{CT}\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{CT} \cdot \vec{CP} = R^2}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \\ z_0 - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} = \boxed{(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) + (z_0 - \gamma)(z - \gamma) = R^2}$$

b) $\Sigma : (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 289 \qquad T(14; 4; -6)$,

$$(\Sigma) : (x-2)(x-2) + (y+4)(y+4) + (z-3)(z-3) = 289$$

$$(\pi) : (14-2)(x-2) + (4+4)(y+4) + (-6-3)(z-3) = 289$$

$$(\pi) : \underline{12x} - 24 + \underline{8y} + 32 - \underline{9z} + 27 - 289 = 0$$

$$\boxed{(\pi) : 12x + 8y - 9z - 254 = 0}$$