Analyse exercice 2.37

Calculer les zéros et les extremums de $f(x) = \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$.

Recherche de l'ensemble de définition

1. $\sqrt{x} : x \geq 0$
2. $\ln(\sqrt{x}) : x > 0$
3. $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Donc $ED(f) = [1; +\infty[$

Recherche des zéros de f
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln(x)} = \ln(\sqrt{x}) \qquad x \in ED(f)$

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(x)} &= \ln(\sqrt{x})\\ \ln(x) &= \big(\ln(x^{1/2})\big)^2\\ \ln(x) &= \left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)^2\end{aligned}$$

posons $t = \ln(x)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}t^2 - t &= 0\\ t^2 - 4t &= 0\\ t(t-4) &= 0\end{aligned}$$

donc $t = 0$ ou $t = 4$.

1. Si $t = 0$, alors $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
2. Si $t = 4$, alors $\ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = e^4$

Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^4$.

Recherche des extremums Calculons la dérivée de $f(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} - 1\right)\\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1-\sqrt{\ln(x)}}{\sqrt{\ln(x)}}\right)\end{aligned}$$

$ED(f') =]1; +\infty[$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{\ln(x)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow x = e.$

1. Si $1 < x < e$: $f'(x) > 0$
2. Si $x = e$: $f'(x) = 0$
3. Si $x > e$: $f'(x) < 0$

Donc, $f(x)$ a un maximum en $x = e$ de coordonnées $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.
Il faut regarder également aux bornes de l'ensemble de définition. On remarque qu'on a un minimum en $x = 1$ de coordonnées $(1, 0)$.