3M6 – Mercredi 23 septembre 2020 Nom : ....

Algèbre linéaire I (Matrices) – TE n° 749

Problème 1 (5 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Si $A = (a_{ij})$, donner a_{32}.

b) Calculer, si c'est possible, $A\,{}^tA$.

c) Calculer, si c'est possible, A^2.

d) Calculer AV.

a) $a_{32} = -6$

b) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 44 & 57 \\ 44 & 51 & 41 \\ 57 & 41 & 105 \end{pmatrix}$

c) Impossible : $(3 \times 4) \cdot (3 \times 4)$, $4 \neq 3$

d) $AV = \begin{pmatrix} -21 \\ -31 \\ -21 \end{pmatrix}$

Problème 2 (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour n un entier positif.

$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3\, I_2$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = -3\, A$

$A^4 = (A^2)^2 = 9\, I_2$

$A^5 = A^4 A = 9A$

$A^6 = (-3A) \cdot (-3A) = 9 \cdot A^2 = -27\, I_2$

$A^7 = -27A$

Si n est pair : $A^n = (-3)^{\frac{n}{2}}\, I_2$

Si n est impair : $A^n = (-3)^{\frac{n-1}{2}}\, A$

Problème 3 (4 points)

Calculer l'inverse de la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Problème 4 (6 points)

Soit le système d'équation

$$\begin{cases} x + y + 7z = -1 \\ 2x - y + 5z = -5 \\ -x - 3y - 9z = -5 \end{cases}$$

a) Donner la matrice C des coefficients du système, puis la matrice A augmentée du système.

b) Résoudre le système d'équations en transformant la matrice augmentée du système sous forme échelonnée réduite.

a) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Finalement $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$ $\quad S = \{(2;4;-1)\}$

Problème 5 (3 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices M carrées d'ordre 2 telles que $A \cdot M = M \cdot A$.

Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Alors

1) $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$

2) $MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$

Ainsi : $\begin{cases} c = -b \\ -a = -d \\ d = a \\ -b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c = -b \\ a = d \end{matrix}$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$