3M6 – Jeudi 26 novembre 2020 Nom : ....

Algèbre linéaire II (Espace vectoriel) – TE n° 753

Problème 1 (8 points)

On munit $E = \mathbb{R}^2$ des deux opérations suivantes :

- $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$
- $k \cdot (x, y) = (k\,x, k\,y)$

1) Quel est l'élément neutre de l'addition ?
2) Quel est l'opposé de $(x, y) \in E$?
3) E munit de ces deux opérations est-il un espace vectoriel ? Justifier la réponse.

1) $(x,y) + (0,0) = (x+1, y+1)$

en posant $e = (-1,-1)$, on a le symétrique. En effet

$(x,y) + (-1,-1) = (x-1+1, y-1+1) = (x,y)$

$(-1,-1) + (x,y) = (-1+x+1, -1+y+1) = (x,y)$

2) $(x,y) + (x',y') = (-1,-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+x'+1 = -1 \\ y+y'+1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x' = -x-2 \\ y' = -y-2 \end{matrix}$

$(x,y) + (-x-2,-y-2) = (x-x-2+1, y-y-2+1) = (-1,-1)$

$(-x-2,-y-2)$ est le symétrique de (x,y)

3) Regardons si $\lambda \cdot [(x,y)+(x',y')] = \lambda(x,y) + \lambda(x',y')$

• $\lambda[(x,y)+(x',y')] = \lambda(x+x'+1, y+y'+1) = (\lambda x+\lambda x'+\lambda, \lambda y+\lambda y'+\lambda)$

• $(\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') = (\lambda x+\lambda x'+1, \lambda y+\lambda y'+1)$

Ces deux expressions ne sont pas égales. E n'est pas un ev

Problème 2 (12 points)

On définit sur $H = \mathbb{R}^2$

— l'addition $\oplus$ par

$$(x, z) \oplus (x', z') = (x + x', z + z')$$

— la multiplication externe $\odot$ par

$$\lambda \odot (x, z) = (4\,x, \lambda\, z)$$

1) Calculer $\lambda \odot (\mu \odot (x, z))$.
2) Calculer $(\lambda \cdot \mu) \odot (x, z)$.
3) Calculer $\lambda \odot ((x, z) \oplus (x', z'))$.
4) Calculer $(\lambda \odot (x, z)) \oplus (\lambda \odot (x', z'))$.
5) Calculer $1 \odot (x, z)$.
6) H muni de ces deux lois est-il un espace vectoriel ? Justifier.

1) $\lambda \odot (\mu \odot (x,z)) = \lambda \odot (4x, \mu z) = (16x, \lambda\mu z)$

2) $(\lambda\mu) \odot (x,z) = (4x, \lambda\mu z)$

3) $\lambda \odot (x+x', z+z') = (4x+4x', \lambda z + \lambda z')$

4) $(4x, \lambda z) \oplus (4x', \lambda z') = (4x+4x', \lambda z + \lambda z')$

5) $1 \odot (x,z) = (4x, z)$

6) Non, car $1 \odot u \neq u$

5) $\Rightarrow$ $1 \odot (x,z) = (4x, z) \neq (x,z)$

Problème 3 (3 points)

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies dans l'intervalle $[0\,;1]$.

On rappelle que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda\, f(x), \forall f, g \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} | f(x) \neq 0, \forall x \in [0\,;1]\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$?

G est un ss-ev de $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda f + \mu g \in G$, $\forall f, g \in G$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Choisissons $f(x) = 1$ $\forall x \in [0,1]$ et $g(x) = -1$, $\forall x \in [0,1]$. Alors $(f+g)(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$. Donc $f+g \notin G$.

G n'est pas un ss-ev de $\mathcal{F}$.

Problème 4 (4 points)

On considère le sous-ensemble E des matrices carrées d'ordre 2 défini par

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

1) Montrons que $A + B \in E \quad \forall A, B \in E$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & m \\ m & k \end{pmatrix} \in E$$

2) Montrons que $\lambda A \in A$, $\forall A \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & m \\ m & k \end{pmatrix} \in E$$

Donc $\lambda A + \mu B \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in E$.

Ainsi c'est un ev

Problème 5 (6 points)

Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1) Dans $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = ((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,-2,1,-1))$

2) Dans $\mathbb{R}_3[x]$, l'ensemble des polynômes en x de degré inférieur ou égal à 3, $\mathcal{G} = (x-1,\ 2x,\ x^2-3x,\ 3x^3+x^2-2)$

1) $x(1,1,0,1) + y(1,-1,1,0) + z(2,0,1,1) + t(0,-2,1,-1) = (0,0,0,0)$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z = 0 \\ x-y-2t = 0 \\ y+z+t = 0 \\ x+z-t = 0 \end{array}\right. \begin{array}{|c|c} t & t \\ & \\ & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+2z = 0 \\ x+y+2z = 0 \\ x+y+2z = 0 \\ x+z-t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+2z = 0 \\ x+z-t = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z+t \\ y = -x-2z = z-t-2z = -z-t \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z+t \\ y = -z-t \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda+\mu \\ y = -\lambda-\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{array}\right.$$

Posons $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on a $\left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{array}\right.$

Donc $\mathcal{F}$ est liée.

Problème 5 b)

Posons $x-1 = (0,0,1,-1)$
$2x = (0,0,2,0)$
$x^2-3x = (0,1,-3,0)$
$3x^3+x^2-2 = (3,1,0,-2)$

Alors $a(0,0,1,-1)+b(0,0,2,0)+c(0,1,-3,0)+d(3,1,0,-2) = (0,0,0,0)$

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}\left\{\begin{array}{rcl} 3d &=& 0 \\ c+d &=& 0 \\ a+2b-3c &=& 0 \\ -a \qquad -2d &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} ① \Rightarrow d=0 \\ ② \Rightarrow c=0 \\ ④ \Rightarrow a=0 \\ ③ \Rightarrow b=0 \end{array}$$

Donc la famille est libre