3M6 – Mardi 19 janvier 2021 Nom : ....

Analyse II – TE n° 755

Problème 1 (8 points)

Calculer les intégrales suivantes (donner les valeurs exactes).

1) $\displaystyle\int_{-4}^{0} x\sqrt{x+4}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

Pour la question 2), effectuer le changement de variable $x = u^2 + 1$.

1) Posons : $t = x+4$ et donc $x = t-4$

$dt = dx$

x	t
-4	0
0	4

$$\int_{-4}^{0} x\sqrt{x+4}\,dx = \int_0^4 (t-4)\sqrt{t}\,dt = \int_0^4 (t-4)t^{1/2}dt =$$

$$\int_0^4 t^{3/2} - 4t^{1/2}\,dt = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{8}{3}t^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{8}{3}\cdot 2^3$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{64}{3} = 64\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = 64\cdot\frac{-2}{15} = \frac{-128}{15}$$

2) Posons $x = u^2+1$ et donc $u = \sqrt{x-1}$ $2 \le x \le 4$

$dx = 2u\,du$

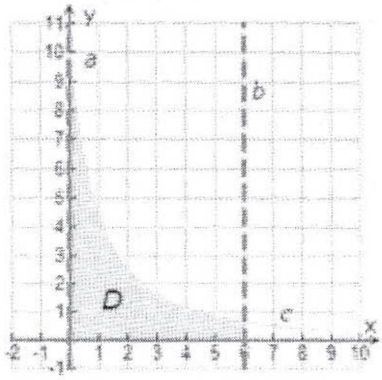
x	u
2	1
4	$\sqrt{3}$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(u^2+1)\cdot u}\cdot 2u\,du = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} = 2\arctan(u)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Problème 2 (12 points)

a) Esquisse du domaine fermé D limité par a, b, c et l'axe Ox



b) Calcul de la valeur exacte de l'aire de D

$$\sigma = \int_0^6 40(x+2)^{-2}\,dx = 40\int_0^6 (x+2)^{-2}\,dx = 40\left[(-1)(x+2)^{-1}\Big|_0^6\right] =$$

$$= \frac{-40}{x+2}\Bigg|_0^6 = -5+20 = 15$$

c) Calcul de la valeur exacte du volume du solide obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox :

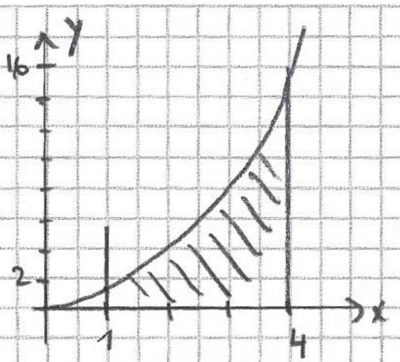
$$V = \pi\int_0^6 \frac{1600}{(x+2)^4}\,dx = 1600\pi\int_0^6 (x+2)^{-4}\,dx = 1600\pi\left[\frac{1}{(-3)}(x+2)^{-3}\Bigg|_0^6\right] =$$

$$= \frac{-1600\pi}{3(x+2)^3}\Bigg|_0^6 == \frac{-25\pi}{24} + \frac{1600\pi}{24} = \frac{1575\pi}{24} = \frac{525\pi}{8} = 65,625\pi$$

Problème 3 (5 points)

La courbe $y = x^2$, les droites $x = 1$, $x = 4$ et l'axe Ox déterminent un domaine plan borné $\mathcal{D}$.

Trouver la valeur exacte à attribuer au paramètre réel m de sorte que la droite $x = m$ partage $\mathcal{D}$ en deux surfaces planes de même aire.



1) Aire de $\mathcal{D}$:

$$\int_1^4 x^2 dv = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(64-1) = \frac{63}{3} = 21$$

2) Calcul de m : $\int_1^m x^2 dx = \frac{21}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^3\Big|_1^m = \frac{21}{2}$$

$$\frac{1}{3}(m^3-1) = \frac{21}{2} \iff m^3 - 1 = \frac{63}{2} \iff m^3 = \frac{65}{2}$$

donc $m = \sqrt[3]{\frac{65}{2}}$

Problème 4 (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\int x(1+x)^n dx$$

Par parties :

$$\int x(1+x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}x(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int(1+x)^{n+1}dx$$

$$\int u \cdot v' = uv - \int u'v$$

$u = x \qquad u' = dx$

$dv = (1+x)^n dx \qquad v = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}x(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2} + C$$

$$= \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\left(x - \frac{1}{n+2}(1+x)\right) + C$$

$$= \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\,\frac{x(n+2)-1-x}{n+2} + C$$

$$= \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\,\frac{nx+2x-1-x}{n+2} + C$$

$$= \frac{(1+x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}(nx+x-1) + C = \frac{(nx+x-1)(1+x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + C$$

$$= \frac{((n+1)x-1)(1+x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + C$$