3M6 – Mardi 16 mars 2021 Nom : ........................

# Analyse III – TE n° 758

13

## Problème 1 (. points)

Calculer les trois intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+3 \\ \hline -\;\;x^2+3 & 1 \\ -3 & \end{array} \qquad \frac{x^2}{x^2+3} = 1 + \frac{-3}{x^2+3}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+3}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2+3}$$

$$= x - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= x - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$ 4

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$

Par éléments simples :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$$

$$x^2+1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$\begin{array}{lll} x=1: & 2 = c & \\ x=0: & 1 = a-b+2 & \Rightarrow \\ x=2: & 5 = a+b+2 & \end{array} \quad \begin{array}{l|c|c} & a & b \\ \begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=3 \\ c=c \end{cases} & \begin{array}{c}(-1)\\ 1 \\ \phantom{1}\end{array} & \begin{array}{c}1\\ 1 \\ \phantom{1}\end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2b = 4 \\ 2a = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = 2$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int (x-1)^{-2}\,dx + 2\int (x-1)^{-3}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} + C$$

$$= \ln|x-1| - \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) + C$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2x-1}{(x-1)^2} + C$$ 5

c) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx$

$(x^2-2x+10)' = 2x-2$

$\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx + \int \frac{7}{\sqrt{(x-1)^2+9}}\,dx$

$= \int (2x-2)(x^2-2x+10)^{-1/2} + \int \frac{7}{\sqrt{(x-1)^2+9}}\,dx$

$= 2(x-2x+10)^{1/2} + 7\ln\left| x-1+\sqrt{(x-1)^2+9}\right| + C$ 4

**Problème 2** (15 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

3 a) Déterminer son ensemble de définition $ED(f)$ et son signe.

6 b) Déterminer ses asymptotes verticales, ~~puis établir la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.~~ et ses asymptotes horizontales

6 c) Déterminer la croissance de $f(x)$. Calculer les cordonnées des éventuels extrema.

| $x$ | | $0$ | | $e^{-1}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | // | $-$ | $0$ | $+$ |

a) $ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1+\ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1+\ln(x)) \cdot \frac{1}{x^2} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$ « $\frac{-\infty}{0}$ »

donc AVD $x = 0$

c) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (1+\ln(x))}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4} = -\frac{1+2\ln(x)}{x^3}$ 2

$f'(x) = 0 \iff x = e^{-1/2}$ 1

Signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $e^{-1/2}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | // | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | // | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

2

max en $\left(e^{-1/2}, \frac{e}{2}\right)$

$f(e^{-1/2}) = \frac{1 + (-\frac{1}{2})}{(e^{-1/2})^2} = \frac{1/2}{e^{-1}} = \frac{1}{2}e$ 1

b) suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^2} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ $\frac{+\infty}{+\infty}$

$\Rightarrow$ AHD : $y = 0$

**Problème 3** (4 points)

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x\,\ln(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x \ln(x^2)}_{ED(f)=\mathbb{R}^*} \underset{0\cdot -\infty}{\overset{ind}{=\!=}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{BH}{=\!=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -2x = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x \ln(x^2) = 0_- \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x\ln(x^2) = 0_+$$

**Problème 4** (11 points - Gymnase du Bugnon 2011)

On donne les courbes

$$(\gamma_1) : y = e^x$$

$$(\gamma_2) : y = \frac{1}{x}$$

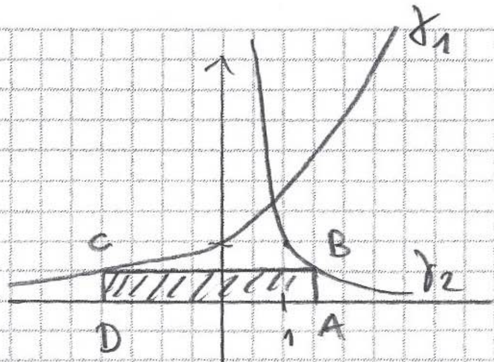
et le point $A(a\,;\,0)$ avec $a > 1$.

a) Déterminer les coordonnées des sommets du rectangle $ABCD$ tel que $B \in \gamma_2$, $C \in \gamma_1$ et $D \in Ox$.

b) Montrer que l'aire de ce rectangle est donnée par $A(a) = \dfrac{a + \ln(a)}{a}$.

c) Pour quelle valeur de $a$ cette aire est-elle maximale ?

a)




$a > 1$

$A(a,0)$ , $B\left(a, \frac{1}{a}\right)$ , $C\left(-\ln(a), \frac{1}{a}\right)$ , $D(-\ln(a), 0)$ 4

Pour $C$ : $e^{\alpha} = \frac{1}{a} \Rightarrow \alpha = -\ln(a)$

b) Aire : $AD = a - (-\ln(a)) = a + \ln(a)$

$AB = \frac{1}{a}$

Donc $A(a) = \dfrac{a + \ln(a)}{a}$ 2

c) $A'(a) = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{a}\right)a - (a + \ln(a))}{a^2} = \dfrac{a + 1 - a - \ln(a)}{a^2}$

$= \dfrac{1 - \ln(a)}{a^2}$ $a > 1$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow a = e$ 5

Tableau de la croissance :

| $a$ | 0 | 1 | | $e$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(a)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $A(a)$ | | | $\nearrow$ | $\boxed{\max}$ | $\searrow$ |

max pour $a = e$