3M6 – Jeudi 1er avril 2021 Nom : ....

Algèbre linéaire III – TE n° 759A

Problème 1 (6 points)

Calculer le déterminant des matrices A et B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b\,c & a\,c & a\,b \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & c-b & a+b \\ b(c-a) & a(c-b) & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & c-b \\ b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(a-b)$$

Problème 2 (9 points)

Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f\colon (x;y) \mapsto (6\,x-3\,y; 2\,y-4\,x; 2\,x-y)$.

a) Écrire la matrice F de f relativement aux bases canoniques $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer $\ker(f)$. Donner une base de $\ker(f)$ relativement à la base canonique $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ relativement à la base canonique $\mathbb{R}^3$.

d) Cette application est-elle bijective ? Justifier.

a) $F = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $F \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Ker}(f) = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle ((1,2)) \rangle$

Base de $\mathrm{Ker}(f)$: $((1;2))$

c) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ $\quad \mathrm{Im}(f) = \{(3t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \langle ((3,-2,1)) \rangle$

Base de $\mathrm{Im}(f)$: $((3,-2,1))$

d) Comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, f n'est pas injective.

On peut aussi voir que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, donc $\exists\, u, v \neq 0$ tel que $f(u) - f(v) = 0$, avec $u \neq v$

Problème 3 (8 points)

Soit l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f((x,y)) = (x+y, x-y)$$

a) Écrire la matrice F associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice F^* de f relativement à la base $\mathbf{B}^* = \big((1;-1),(1;1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b)
$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "F"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, B^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F^*"'] & (\mathbb{R}^2, B^*)
\end{tikzcd}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$F^* = P^{-1} \cdot F \cdot P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème 4 (14 points)

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On définit $\mathbf{B}^\star = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - e_2$ et $u_3 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que $\mathbf{B}^\star$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de h relativement à la base $\mathbf{B}^\star$.

c) Déterminer une base de $\ker(h)$ et de $\mathrm{Im}(h)$.

a) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,0,1)$

B^* est une base $\Leftrightarrow$ le déterminant de $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est non nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

donc B^* est une base.

b) Il faut inverser P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H^* = P^{-1} \cdot H \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Dans B^* : $\operatorname{Ker}(h^*) = \langle u_3 \rangle$ et $\operatorname{Ker}(h) = \langle (1,0,1) \rangle$

$\operatorname{Im}(h^*) = \langle (u_1, 2u_2) \rangle = \langle (u_1, u_2) \rangle$

et $\operatorname{Im}(h) = \langle ((1,1,1), (1,-1,0)) \rangle$

Base : $\operatorname{Ker}(h) = ((1,0,1)) = (u_3)$

$\operatorname{Im}(h) = ((1,1,1), (1,-1,0)) = (u_1, u_2)$

Problème 5 (4 points)

Soit $\mathbb{P}_2[x]$ l'ensemble des polynômes de degré 2 ou moins. Soit $\mathbf{B} = (x^2, x, 1)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2[x]$. Déterminer la matrice D de l'application linéaire d sachant que

$$d(2\,x^2+1) = 4\,x \quad , \quad d(-x^2+2\,x) = -2\,x+2 \quad \text{et} \quad d(x+3) = 1$$

Justifier votre réponse.

$p_1 = 2x^2+1$, $p_2 = -x^2+2x$, $p_3 = x+3$

$B^* = (p_1, p_2, p_3)$ est une base de $\mathbb{P}_2[x]$.

p_1, p_2 et p_3 sont clairement linéairement indépendants.

Donc d est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de B^*.

Posons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a bien

$$d(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4x$$

$$d(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2x+2$$

$$d(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

d n'est autre que la dérivée sur $\mathbb{P}_2[x]$