02.03.21

2.3.19 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

1) $ED(f) = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad \ln(x)$ est défini $\Leftrightarrow x > 0$

2) Parité : aucune car $ED(f)$ non symétrique

3) Signe

x		0		1	
$f(x)$	////	‖	$-$	0	$+$

$x^2 \ln(x) = 0 \qquad \Big| \div x^2$ car $x > 0$

$\ln(x) = 0$

$x = 1$

4) <u>AV</u> :

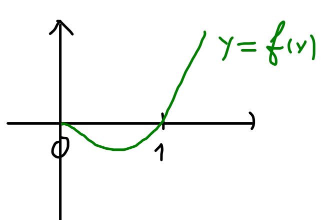
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 \ln(x) \overset{\text{ind}}{\underset{\text{"}0 \cdot -\infty\text{"}}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \overset{BH}{\underset{\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}}{=}}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{x}}{-2\,\frac{1}{x^3}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x^3}^{\,2}}{1} \cdot \frac{1}{-2} =$$

$(x^{-2})' = -2x^{-3}$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{1}{2}x^2 = 0_-$$

Pas d'AV à droite en $x = 0$



Point trou en $(0,0)$

<u>AH / AO à droite</u> $\qquad$ (aucune asymp. à gauche)

AO : $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln(x) = +\infty$ aucune AO

AH : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ aucune AH

5) Etude de la croissance

$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\left(2\ln(x)+1\right)$$

$$ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 0 \iff 2\ln(x) + 1 = 0$$

$$\ln(x) = -1/2$$

$$x = e^{-1/2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$x \simeq 0.606530659712633$

x	0		$1/\sqrt{e}$	
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$
$f(x)$	//	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

min en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} ; \frac{-1}{2e}\right)$

$$f\left(e^{-1/2}\right) = \left(e^{-1/2}\right)^2 \cdot \ln\left(e^{-1/2}\right)$$

$$= e^{-1} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2e}$$

$\simeq -0.183939720585721$

Que se passe-t-il en $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0^>} f'(x) = \lim_{x \to 0^>} x\left(2\ln(x)+1\right) \underset{0 \cdot -\infty}{\overset{\text{ind}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0^>} \frac{2\ln(x)+1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

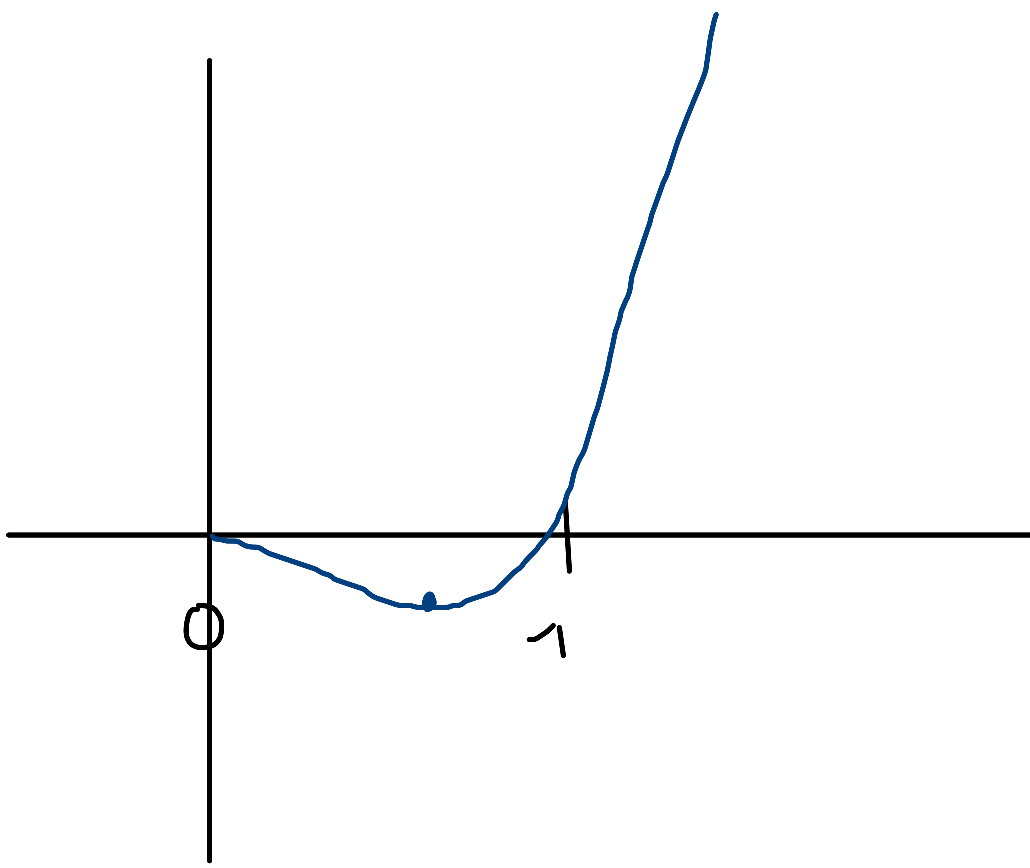
$$= \lim_{x \to 0^>} -2x = 0_-$$

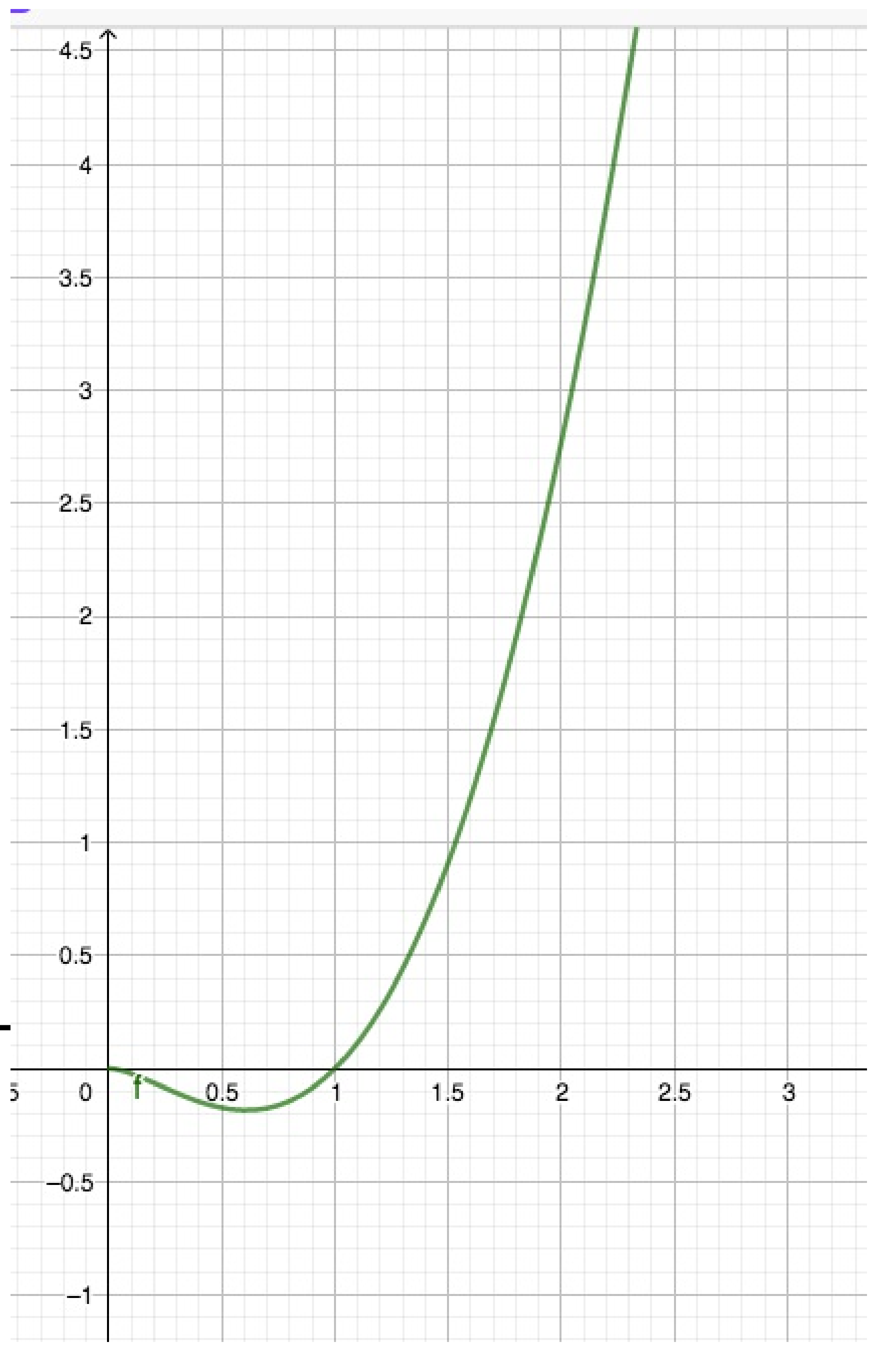
La pente est nulle, on a une tangente horizontale en $x = 0$

6) Courbure

A faire

7) Graphique





2.3.19

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

1) Recherche ED(f) : $\frac{2x}{x+1} > 0$

x		-1		0	
$\frac{2x}{x+1}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

2) Pas de parité, ED non symétrique

3) Signe de f(x)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$

x		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	‖	////	‖	$-$	0	$+$

4) Recherche des asymptotes

AV : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = +\infty \Rightarrow$ AVG $x = -1$

$\ln\left(\frac{-2}{0^-}\right)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = -\infty \Rightarrow$ AVD $x = 0$

$\ln\left(\frac{0^+}{1}\right)$

AH : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(2) \Rightarrow$ AHD : $y = \ln(2)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(2) \Rightarrow$ AHG : $y = \ln(2)$

En conclusion $y = \ln(2)$ est une AH

5) Etude de la croissance

$$\left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$ED(f') = \mathbb{R}^* - \{-1\}$$

x		-1		0	
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↗	‖		‖	↗

Aucun extrema

6) <u>Courbure</u>

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2+x}\right)' = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

x		-1		$-1/2$		0	
$f''(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$
$f(x)$		$\|$				$\|$	

7) Graphique