02.12.20

Base d'un ev

Une base d'un espace vectoriel V est une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, libre et qui engendre V.

Soit $v \in V$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Dans la base $\mathcal{B}$, on écrit v

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

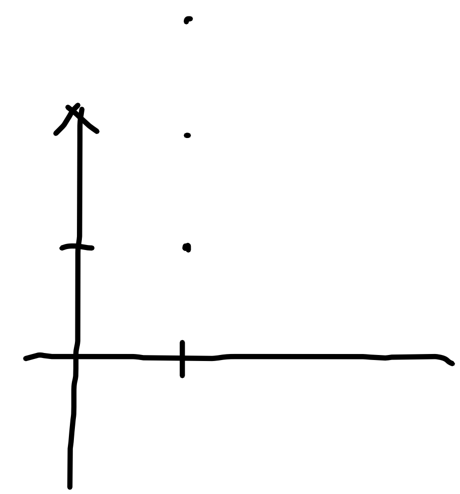
Dans cette base $\mathcal{B}$, la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est unique

On dit que n est la dimension de V.

Ainsi si $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_m)$ alors $n = m$.

Exemples

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big((1,0), (0,1) \big)$



1) Familles liées :

$$\mathcal{F}_1 = \big((1,1), (1,2), (1,3) \big)$$
$$\mathcal{F}_2 = \big((1,1), (3,3) \big)$$
$$\mathcal{F}_3 = \big((0,0), (1,1) \big)$$

2) Familles libres

$$L_1 = \mathcal{B}$$
$$L_2 = \big((1,1) \big)$$
$$L_3 = \big((1,1), (1,2) \big)$$

3) Base

$$\mathcal{B} = \big((a,b), (c,d) \big) \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

1.2.19 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que la famille $(2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$ est une base de P_2. Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes x^2 et $(2x - 1)^2$.

La base naturelle de P_2 est

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$$

Donc $\dim(P_2) = 3$.

Il suffit de démontrer qu'elle est libre.

$$\lambda_1(2-x) + \lambda_2(1+2x) + \lambda_3(1-x^2) = 0$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{|l} \lambda_2 \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\mathcal{B}_1 = (2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$$

$$p = x^2$$

exprimer p dans $\mathcal{B}_1$:

$$\lambda_1(2-x) + \lambda_2(1+2x) + \lambda_3(1-x^2) = x^2$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l|l} & \lambda_1 \\ \begin{cases} \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} & \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 \\ 5\lambda_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{5} \\ \lambda_2 = \frac{1}{5} \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x - 1 + x^2 = x^2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

Alors que dans la base naturelle $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(F) = 4 \Rightarrow \mathcal{F}$ est une base

1.2.21 Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(1)$$

$$\begin{cases} x = 3K - t \\ y = K \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension des solutions est un ev de dim 2

$\mathcal{B}_1 = \big((3,1,0), (-1,0,1) \big)$ est une base.