03.03.21

1.4.3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 9 & -11 \\ 0 & -7 & 7 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 9 & -11 \\ -7 & 7 & -12 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 11 & 9 & 7 \\ 7 & 7 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$

$C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$

$$= -(-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -(22 - 49) = 27$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 - \frac{49}{2} & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - \frac{7}{2} C_2$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{27}{2} & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

$$\begin{vmatrix} \lambda C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^3 \begin{vmatrix} C_1 & C_1 & C_3 \end{vmatrix} = \lambda$$

1.4.4 Calculer et factoriser en utilisant les propriétés du déterminant :

a) $\begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) $\left|\begin{matrix} 1 & b+c & a \\ 1 & a+c & b \\ 1 & a+b & c \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & b+c \\ 1 & a+c \\ 1 & a+b \end{matrix}$

$$= (a+c)c + (b+c)b + a(a+b)$$
$$- a(a+c) - b(a+b) - c(b+c) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & a \\ 1 & a+b+c & b \\ 1 & a+b+c & c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

$$= 0$$

__Propriétés__

$$\begin{vmatrix} C_1 & \lambda C_1 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(x-1)\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & x \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$= (x-1)(x-a)$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-b & b & c-b \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2$

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-b & b & c-b \\ (a-b)(a+b) & b^2 & (c-b)(c+b) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(c-b)\begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & b & 1 \\ a+b & b^2 & c+b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(c-b)\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & c+b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\left[c+b-(a+b)\right]$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

d) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3-t & -1 & 1 & 3-t & -1 \\ 5 & -3-t & 1 & 5 & -3-t \\ 6 & -6 & 4-t & 6 & -6 \end{array}\right.$

$$= (3-t)(-3-t)(4-t) - 6 - 30$$
$$- 6(-3-t) - (-6)(3-t) - (-1)(4-t)$$
$$= -t^3 + 4t^2 + 4t - 16 \qquad \text{(après calculs)}$$

$$= -t^2(t-4) + 4(t-4)$$
$$= (t-4)(-t^2+4) = (t-4)(2-t)(2+t)$$

Par Horner :

$$p(t) = -t^3 + 4t^2 + 4t - 16$$
$$p(2) = -8 + 16 + 8 - 16 = 0 \Rightarrow t-2 \mid p$$

	-1	4	4	-16
2		-2	4	16
	-1	2	8	0

$$p(t) = (t-2)(-t^2+2t+8)$$
$$= -(t-2)(t^2-2t-8)$$
$$= -(t-2)(t-4)(t+2)$$

d) $$\begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 5 & -2-t & 1 \\ 6 & -2-t & 4-t \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

$$= (-2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix}$$

$$= (-2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3+t \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$= (-2-t) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & -3+t \end{vmatrix}$$

$$= (2+t) \left[(3-t)(-3+t) + 1 \right]$$

$$= (2+t) \left(-9 + 6t - t^2 + 1 \right)$$

$$= (2+t) \left(-t^2 + 6t - 8 \right)$$

$$= -(2+t)(t^2 - 6t + 8)$$

$$= -(2+t)(t-4)(t-2)$$

A terminer 1.4.5