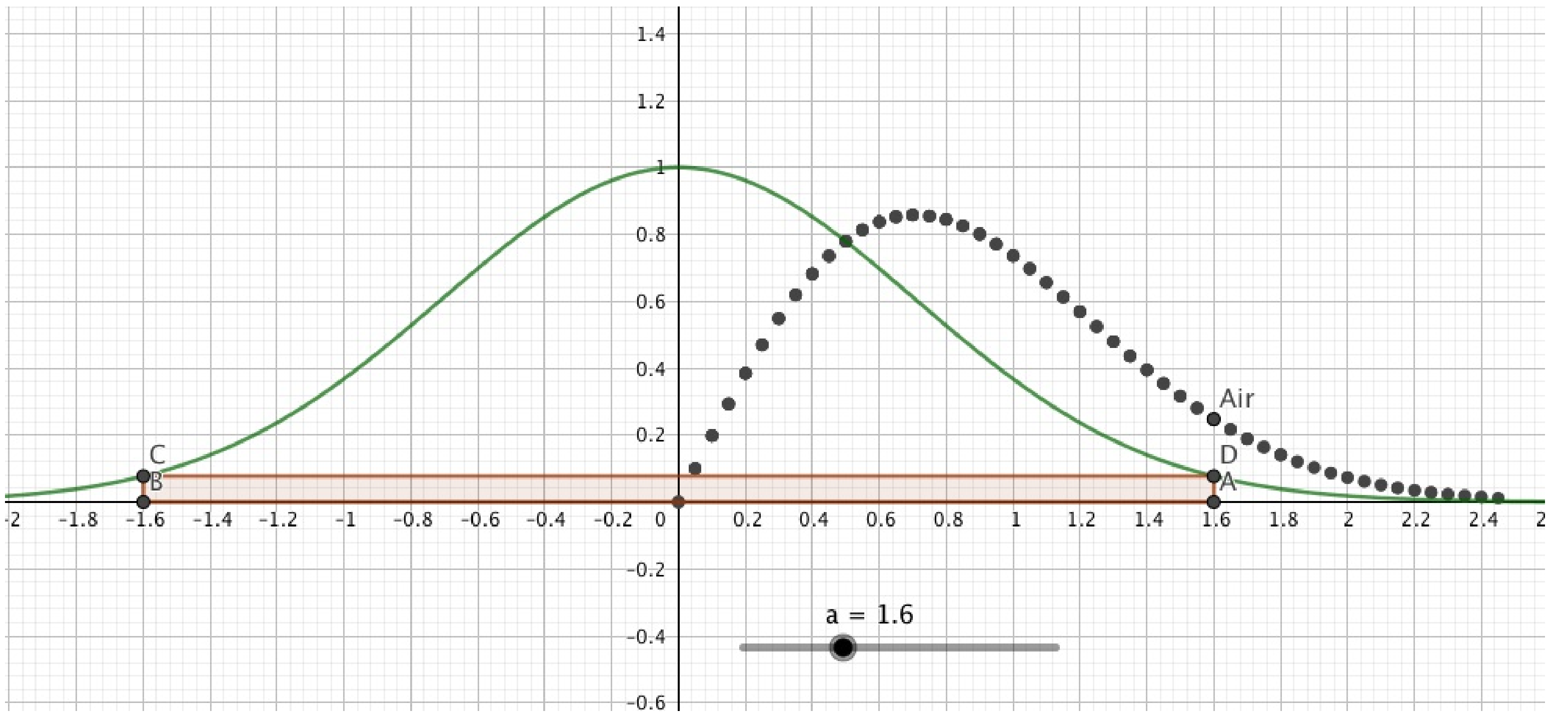
04.03.21

An

2.3.25 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.

$f(x) = e^{-x^2}$, $ED(f) = \mathbb{R}$ f est paire



Posons $A(x,0)$ le point sur Ox, on a $B(-x,0)$, $C(-x, f(-x))$ et $D(x, f(x))$

Aire du rectangle : $\sigma(x) = 2x \cdot f(x)$

$= 2x\, e^{-x^2}$, $x > 0$

Déterminons le max de cette fonction

$$\sigma'(x) = 2\left[e^{-x^2} + x \cdot (-2x)\, e^{-x^2}\right]$$

$$= 2e^{-x^2}\left[1 - 2x^2\right]$$

$$\sigma'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\sigma'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\sigma(x)$				0	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$

max en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma(x) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \cong 0{,}86$

$$\max\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{\frac{2}{e}}\right)$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\sigma(x) = \underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{e^{-x^2}}_{v}$$

$$\sigma'(x) = 2\,e^{-x^2} + 2x\;e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= 2e^{-x^2}\left[1 - 2x^2\right]$$

$$= 2e^{-x^2}\left(1 - \sqrt{2}x\right)\left(1 + \sqrt{2}x\right)$$

zéros de $\sigma'(x)$: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$