06.01.21

1.2.26 Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$\{(3;2;-2);(7;-3;1);(-11;8;-4);(4;-5;3)\}$$

$$\quad f_1 \qquad f_2 \qquad f_3 \qquad f_4$$

$$V = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subset \mathbb{R}_3$$

On sait que $\dim(V) \leq 3$

1) (f_1, f_2) est une famille libre

On "voit" que : $f_2 + f_4 - f_3 = 0$

2) (f_1, f_2, f_4) est-elle libre ?

$f_1 + f_4 - f_2 = 0$ Non

On a la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$

La deuxième méthode consiste à trouver la matrice échelonnée réduite

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -11 & 8 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -11 & 8 & -4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -11 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

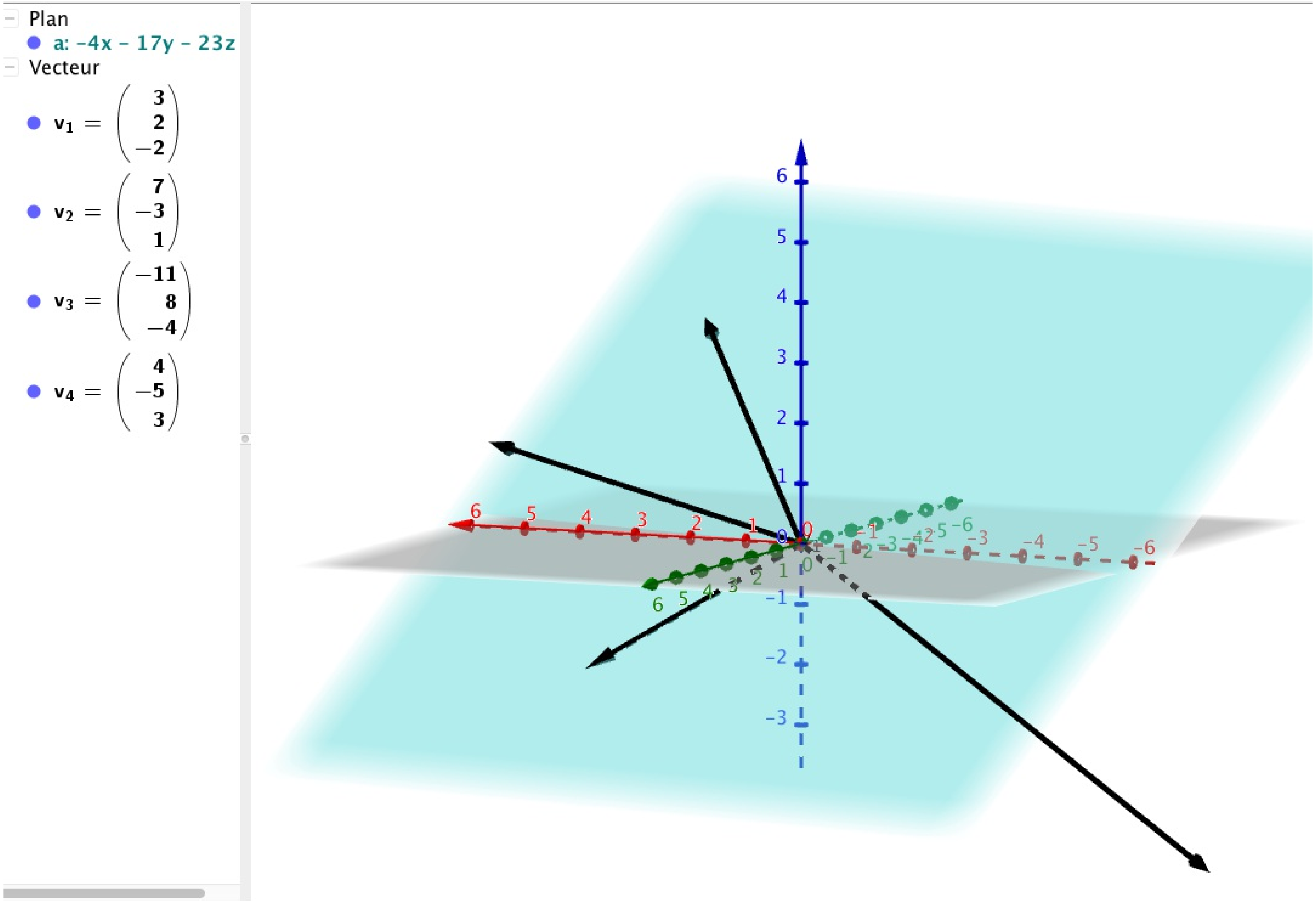
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -14 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \dim(V) = 2$$

$$L_1 \leftarrow \tfrac{1}{3} L_1 \ ; \ L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{7}{3} L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -23/3 & 17/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\tfrac{3}{23} L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2/3 & -2/3 \\ 0 & \boxed{1} & -51/69 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


Plan
a: -4x - 17y - 23z
Vecteur
$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
$v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$v_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$
$v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.2.27 Soit $(e_1; e_2; e_3; e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs :

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4 \qquad u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$$

$$u_3 = 3e_1 + 7e_2 + e_4 \qquad u_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$$

Extraire de la famille $(u_1; u_2; u_3; u_4)$ une base de U.

$$U_1 = (-1, 1, 2, -1)$$

$$U_2 = (2, 3, -1, 1)$$

$$U_3 = (3, 7, 0, 1) \qquad U_3 + 2U_1 = U_4$$

$$U_4 = (1, 9, 4, -1) \qquad \text{on élimine } U_4$$

. . .

1.2.28 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres réels. Calculer la dimension du sous-espace

$$\langle \underbrace{4x^2 - x + 2}_{f_1}; \underbrace{2x^2 + 6x + 3}_{f_2}; \underbrace{-4x^2 + 10x + 2}_{f_3} \rangle$$

dans P_3.

$\dim(P_3) = 4$ $\qquad$ $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$

$f_1 = (0, 4, -1, 2)$

$f_2 = (0, 2, 6, 3)$

$f_3 = (0, -4, 10, 2)$ $\qquad$ ...

1.2.29 Soit $F = \langle \overset{f_1}{(1;3;-3;-1;-4)}; \overset{f_2}{(1;4;-1;-2;-2)}; \overset{f_3}{(2;9;0;-5;-2)} \rangle$ et $G = \langle \overset{g_1}{(1;6;2;-2;3)}; \underset{g_2}{(2;8;-1;-6;-5)}; \underset{g_3}{(1;3;-1;-5;-6)} \rangle$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Calculer $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$.

1) $F, G \subset \mathbb{R}^5$, donc $\dim(F)$ et $\dim(G) \leq 5$

2) $F = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ et $G = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$, donc
$\dim(F)$ et $\dim(G) \leq 3$

$$F + G = \langle f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 \rangle \subset \mathbb{R}^5$$

3) Base de F : (f_1, f_2) libre

$$-f_1 + 3f_2 - f_3 = 0$$

Base de F $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2)$

4) (Base de G : (g_1, g_2) libre)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 \div (-3) \,;\, L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 6 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 6 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(H) = 3 \Rightarrow \dim(G) = 3$$

$$\mathcal{B}_G = (g_1, g_2, g_3)$$

Posons $g_4 = (0, 1, 1, 1, 3)$ et $g_5 = (0, 0, 1, -2, -1)$

5) Calculons une base de $F+G$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \leftrightarrow L_5 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ h_2 \\ h_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Donc $\dim(F+G) = 3$

$$\mathcal{B}_{F+G} = (f_1, h_2, h_3)$$

Déterminons $\dim(F \cap G)$:

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

$$3 = 2 + 3 - \underbrace{}_{2}$$

1.2.31 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels A et B. Dans les trois cas ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

- $\mathbb{R}^3$ est-il la somme de A et B ?
- $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de A et B ? Si ce n'est pas le cas, déterminer $A \cap B$.

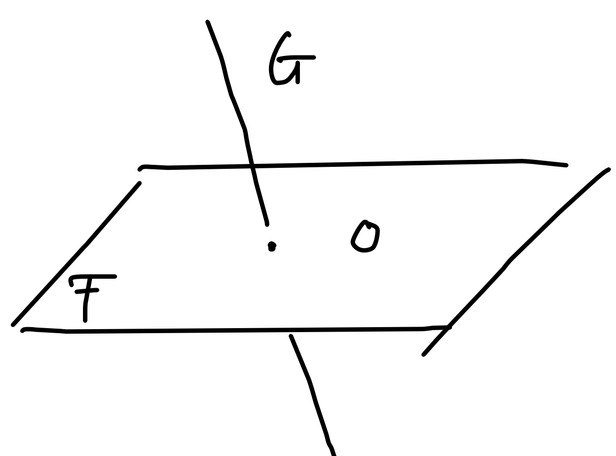
a) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un ev V.

On dit que V est la somme directe de F et G si les deux conditions sont vérifiées :

1) $V = F + G$
2) $F \cap G = \{0_V\}$

On note $V = F \oplus G$.



$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{F}_{\text{plan}} \oplus \underbrace{G}_{\text{droite}}$$