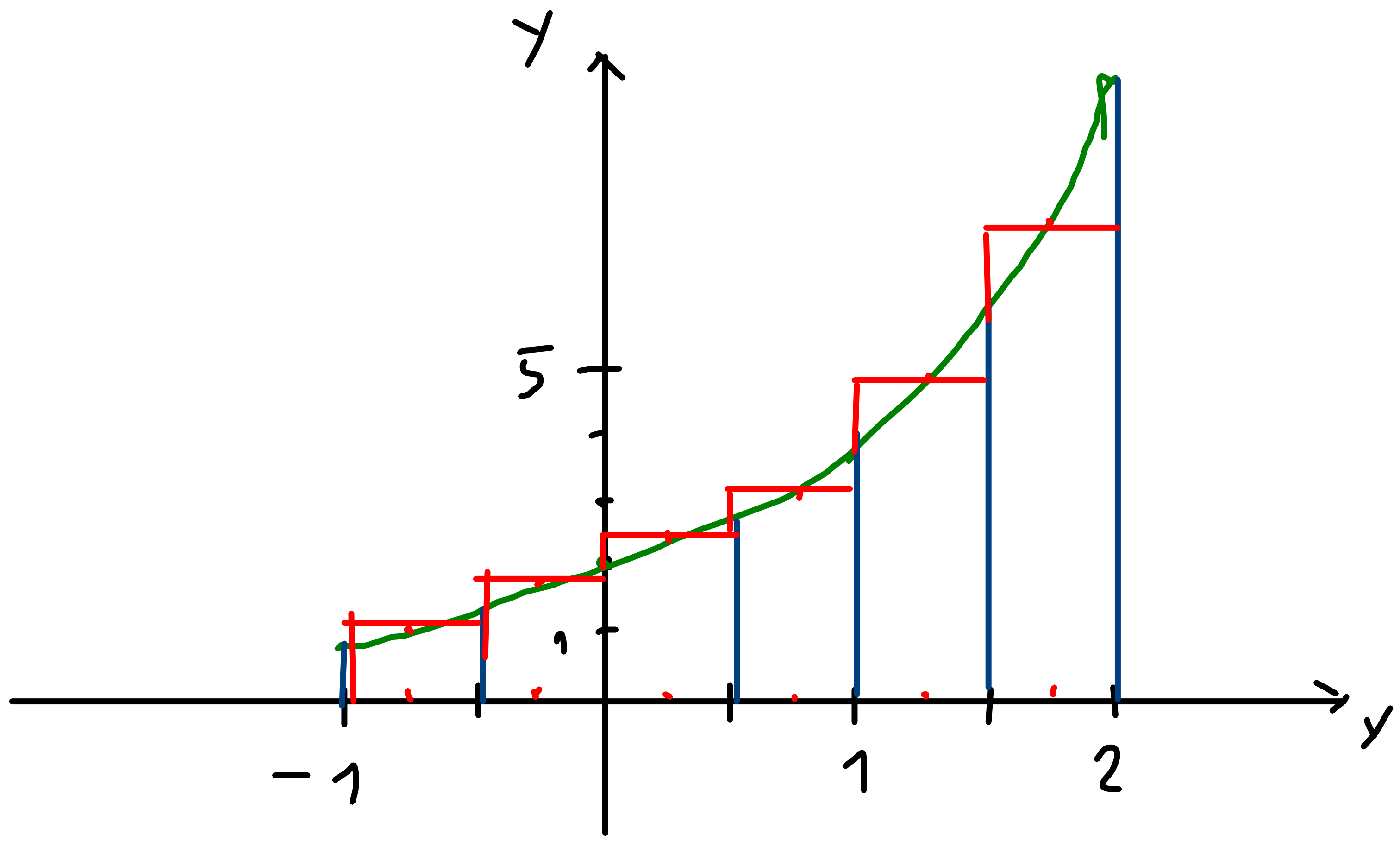
06.10.20

2.1.3 Considérer la fonction $f(x) = e^x + 1$ sur l'intervalle $[-1; 2]$. En subdivisant cet intervalle en six sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.



$$S_{inf} = \frac{1}{2}\left[f(-1) + f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) \right]$$

$$=$$

$$S_{sup} = \frac{1}{2}\left[f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2) \right]$$

$$=$$

$$S_R = \frac{1}{2}\left[f\left(-\tfrac{3}{4}\right) + f\left(-\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f\left(\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{7}{4}\right) \right]$$

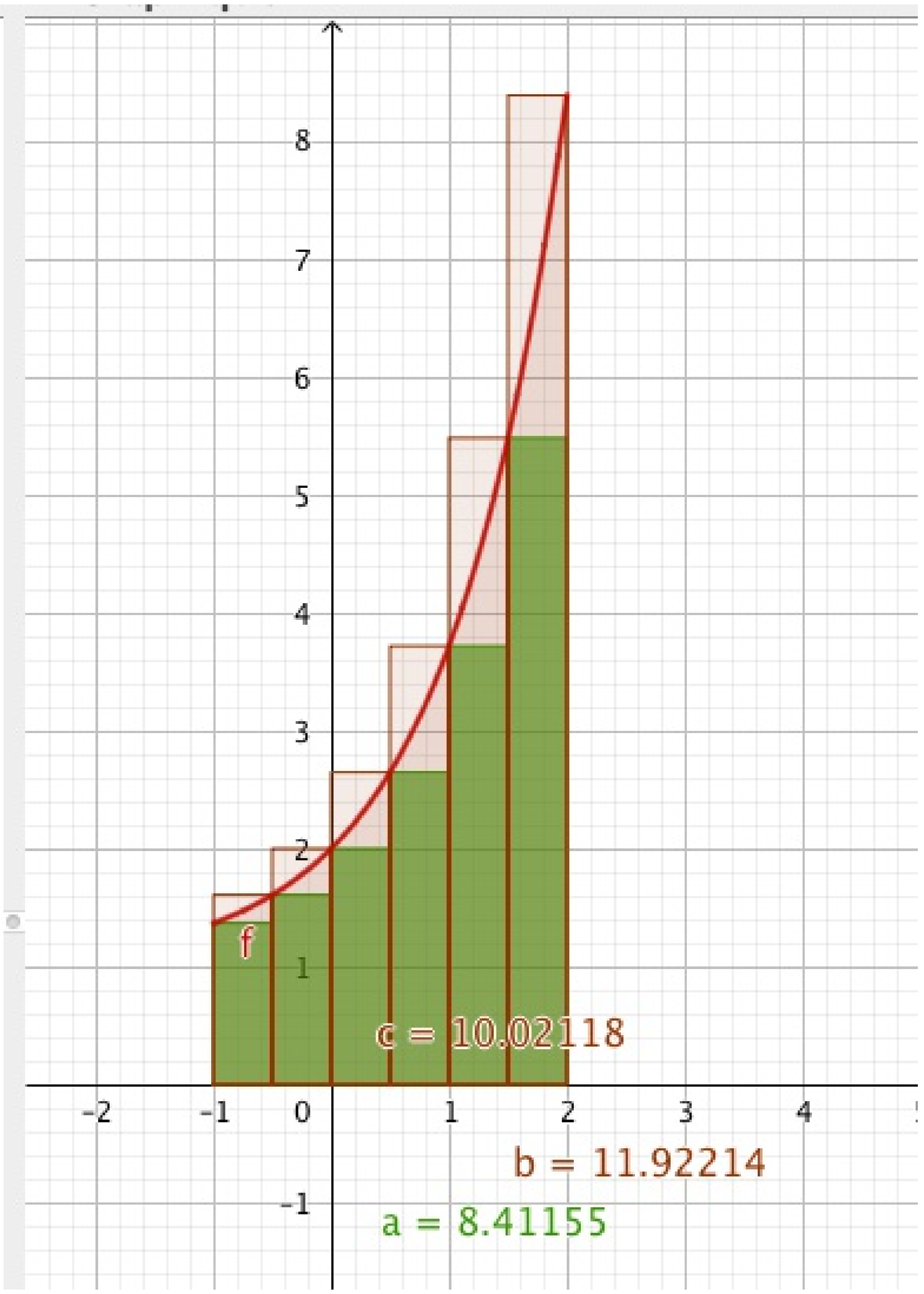
$$=$$

Fonction

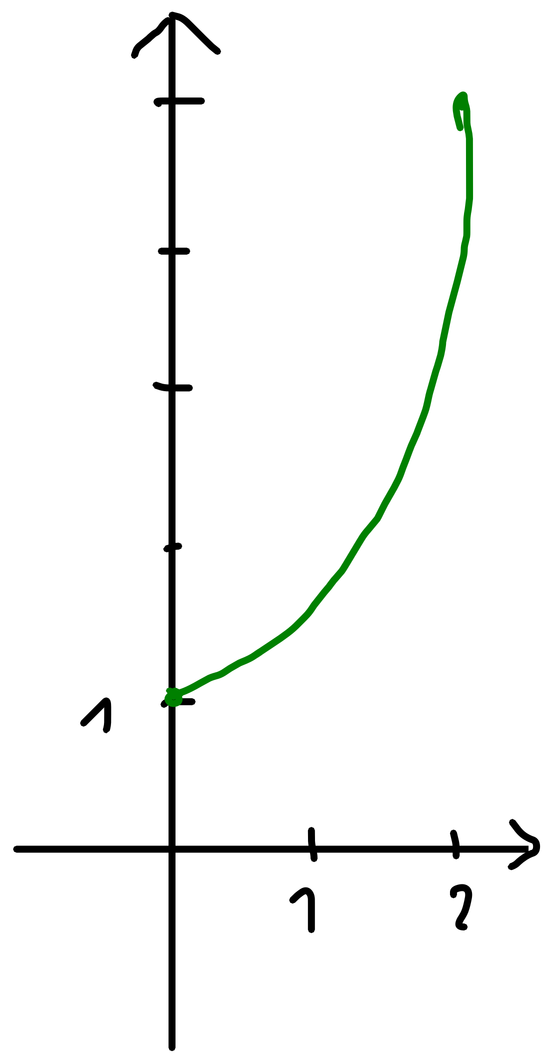
- $f(x) = e^x + 1, \quad (-1 \leq x \leq 2)$
- $g(x) = e^x + 1$

Nombre

- a = 8.41155
- b = 11.92214
- c = 10.02118



2.1.4 En utilisant une somme de Riemann, trouver une approximation de l'aire sous la courbe $y = x^2 + 1$ entre les verticales $x = 0$ et $x = 2$.



Subdivison de $[0;2]$

$$\sigma = \left\{0;\ 1\cdot\frac{2}{n};\ 2\cdot\frac{2}{n};\ 3\cdot\frac{2}{n};\ \dots;\ (n-1)\cdot\frac{2}{n};\ 2\right\}$$

$$S_R = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{2k+1}{n}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+1)^2}{n^2} + (n-1)\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4k^2+4k+1}{n^2}\right] + \frac{2(n-1)}{n}$$

Primitives et intégrales

Une fonction F, telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in [a, b]$ est une primitive de f sur $[a, b]$

Remarquons qu'une primitive est continue, puisqu'elle est dérivable

Théorème

$\boxed{\text{Si } f \text{ admet une primitive } F \text{ dans } [a,b], \text{ alors toutes les primitives de } f \text{ sont données par } F(x) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}}$

Démonstration Soit F_1 et F_2 deux primitives de f.
Montrons que $F_1 = F_2 + C$

$$(F_1 - F_2)'(x) = \left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x)$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

donc $(F_1 - F_2)(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + c$

cqfd

L'intégrale indéfinie de la fonction f dans l'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble de toutes ses primitives. On note

$$\int f(x)\,dx$$

Si F est une primitive de f, alors

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Par exemple : $\displaystyle \int \underbrace{x^2}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{F(x)} + c$

f	f'
x	1
x^2	$2x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
K	0

f	F
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

$n \neq -1$

2.2.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$;

b) $F(x) = \dfrac{2x^2-1}{2-x^2} + 7$ et $f(x) = \dfrac{6x}{(2-x^2)^2}$;

c) $F(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 11$ et $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$;

---

d) $F(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}$.

a) $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}\right)' = \left(-2 \cdot x^{-\frac{7}{2}}\right)' = -2 \cdot \left(x^{-\frac{7}{2}}\right)'$

Propriétés de la dérivée

1) $(k)' = 0$

2) $(u+v)' = u' + v'$

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

6) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

7) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ex : $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$