07.10.20

1) Munissons $\mathbb{R}^2$ de deux lois :

- L'addition : $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$
- La multiplication par un scalaire :

$$\lambda\cdot(x,y) = (2x, 0)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un ev, parce que

$$1\cdot(x,y) = (2x, 0) \neq (x,y)$$

2) Munissons $\mathbb{R}_+^*$ et posons

1) $x \oplus y = xy \qquad , \quad x, y \in \mathbb{R}_+^*$

2) $\lambda \odot x = x^{\lambda} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \oplus 4 = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \odot 4 = 4^{\sqrt{2}}$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ ~~est~~ est un ev

$\oplus$ est une opération interne, $x \oplus y = xy \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

1) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$

2) $(x \oplus y) \oplus z = xy \oplus z = xy \cdot z = xyz$

$= x \cdot yz = x \oplus yz = x \oplus (y \oplus z)$

3) $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$

$1 \oplus x = 1 \cdot x = x$

1 est l'élément neutre

4) $x \oplus y = 1 \Rightarrow x \oplus y = xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

Le symétrique de x est $\frac{1}{x}$

$x \oplus \frac{1}{x} = 1$

$(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ est un groupe abélien.

5) $\alpha \odot (\beta \odot x) = \alpha \odot (x^{\beta}) = (x^{\beta})^{\alpha} = x^{\alpha\beta}$

et $(\alpha\beta) \odot x = x^{\alpha\beta}$

donc $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha\beta) \odot x$

6) $1 \odot x = x^{1} = x$

7) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$

et $(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$

donc $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

8) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha + \beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = (\alpha \odot x) \cdot (\beta \odot x)$

$= (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$\cancel{A} = \{(x;y;z)\|x=12\}$	$B = \{(x;y;z)\|z=0\}$
$C = \{(x;y;z)\|y=3x\}$	$\cancel{D} = \{(x;y;z)\|2x+y+z=21\}$
$E = \{(x;y;z)\|3x+4y-5z=0\}$	$F = \{(x;y;z)\|xy=z\}$
$G = \{(x;y;z)\|x^2+y^2=z^2\}$	$H = \left\{(x;y;z)\|x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\right\}$

$+ :\ (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

$\cdot :\ \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Soit $(E,+,\cdot)$ un ev. Soit $V \subset E$.
On dit que V est un sous-ev de E, si $(V,+,\cdot)$ est un ev.

<u>Théorème</u> Soit $(E,+,\cdot)$ un ev et $V \subset E$.
$(V,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\alpha\cdot x + \beta\cdot y \in V$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x, y \in V$

ou si on préfère : 1) $\alpha \cdot x \in V$

2) $x + y \in V$

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x; y; z) | x = 12\}$ $\qquad$ $B = \{(x; y; z) | z = 0\}$

A: $(12, 0, 4)$, $(12, -4, 18)$, ...

$(12, 0, 4) + (12, -4, 18) = (24, -4, 22) \notin A$

$(0, 0, 0) \notin A$

B: 1) $(x, y, 0)$, $(a, b, 0) \in B$

$(x, y, 0) + (a, b, 0) = (x+a, y+b, 0)$

2) $\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in B$

$C = \{(x;y;z) | y = 3x\}$ $D = \{(x;y;z) | 2x + y + z = 21\}$

$(x; 3x; z)$, $(a; 3a; b)$

1) $(x; 3x; z) + (a; 3a; b) = (\underbrace{x+a}, 3(x+a), z+b)$

$= (t, 3t, s) \in C$

$\lambda(x; 3x; z) = (\underbrace{\lambda x}; 3\lambda x, z)$

$(t; 3t; z)$

$E = \{(x;y;z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$

(x, y, z) $3x + 4y - 5z = 0$

(a, b, c) $3a + 4b - 5c = 0$

$(x, y, z) + (a, b, c) = (\underbrace{x+a}, \underbrace{y+b}, \underbrace{z+c})$

$3(x+a) + 4(y+b) - 5(z+c) =$

$\ldots = 0 + 0$