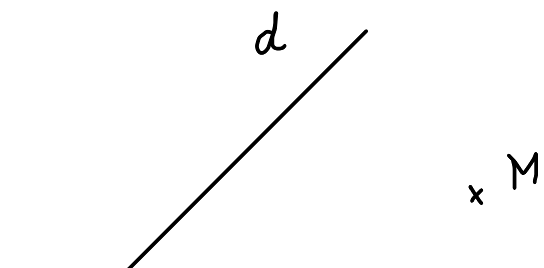
07.09.20

3.5.11 Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant le point $M(2;-2;1)$ et la droite

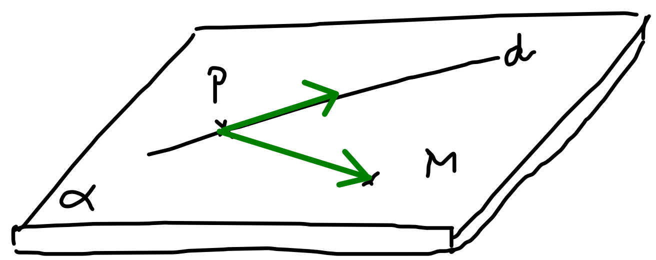
$$d: \begin{cases} x = 1+2k \\ y = 2-3k \\ z = -3+2k \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

$P(1;2;-3) \in d$



$M \notin d$



deux vecteurs directeurs de α : $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$(\alpha): \left| \begin{array}{ccc|cc} x-2 & 2 & 1 & x-2 & 2 \\ y+2 & -3 & -4 & y+2 & -3 \\ z-1 & 2 & 4 & z-1 & 2 \end{array} \right| = 0$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$\Rightarrow -12(x-2) - 8(z-1) + 2(y+2)$

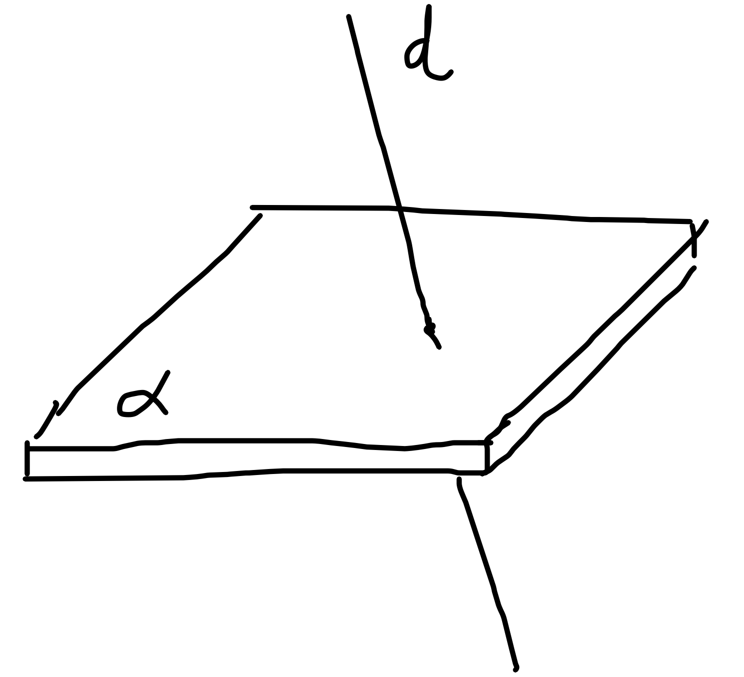
$+3(z-1) + 8(x-2) - 8(y+2)$

$= -4x - 6y - 5z + 1 = 0$

$(\alpha): \quad 4x + 6y + 5z - 1 = 0$

3.5.12 Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a) $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha : 2x + y - z + 15 = 0$



$$\begin{cases} x = 3 + 2K \\ y = 5 - 2K \\ z = 3 + 2K \\ 2x + y - z + 15 = 0 \end{cases}$$

Déterminons K :

$$2(3+2K) + (5-2K) - (3+2K) + 15 = 0$$

$$23 = 0$$

Aucune solution, donc $d \,//\, \alpha$

b) $d : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ $\alpha : 2x + 3y + z - 1 = 0$

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -1 - 2k \\ z = 0 + 6k \end{cases}$$

d $A(a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}$$

$$(\alpha) : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

Déterminons k :

$$2(1+k) + 3(-1-2k) + 6k - 1 = 0$$

$$2k - 2 = 0$$

$$k = 1$$

Point d'intersection $(2; -3; 6)$

c) $d : \begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha : x + 2y - 4z - 4 = 0$

Résolvons le système :

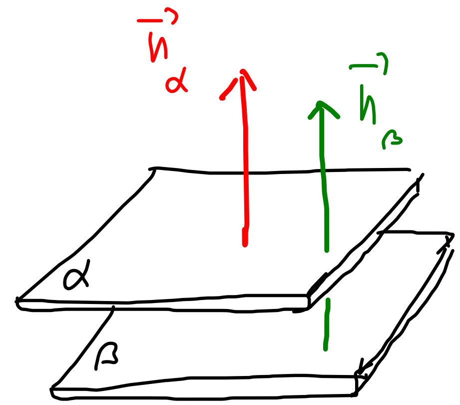
$$\left\{\begin{array}{l} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \\ x + 2y - 4z - 4 = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} x & \\ 1 & 1 \\ (-1) & \\ & (-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 2 \\ -y + z = -1 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d \subset \alpha$$

3.5.13 Deux plans sont donnés par leurs équations. Déterminer s'ils sont concourants, parallèles ou confondus et, selon les cas, leur intersection.

a) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ $\qquad$ $\beta : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$



Deux plans sont
1) confondus
2) parallèles
3) sécants

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_\alpha \not\parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \alpha, \beta \text{ sécants}$$

Intersection $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 4 = 0 \\ 3x + 2y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2y + 5z = 4 - 3K \\ 2y + 5z = 4 - 3K \\ x = K \end{array} \right. \quad \begin{array}{c|c} y & z \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \\ & \end{array}$$

$$\begin{cases} 10z = 8 - 6K \\ -4y = 0 \\ x = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = K \\ y = 0 \\ z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}K \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

b) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$

$$\beta : \begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases} \text{, avec } k, n \in \mathbb{R}$$

$$(\beta) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

après calculs : $(\beta) : 3x - 2y + 5z + 8 = 0$

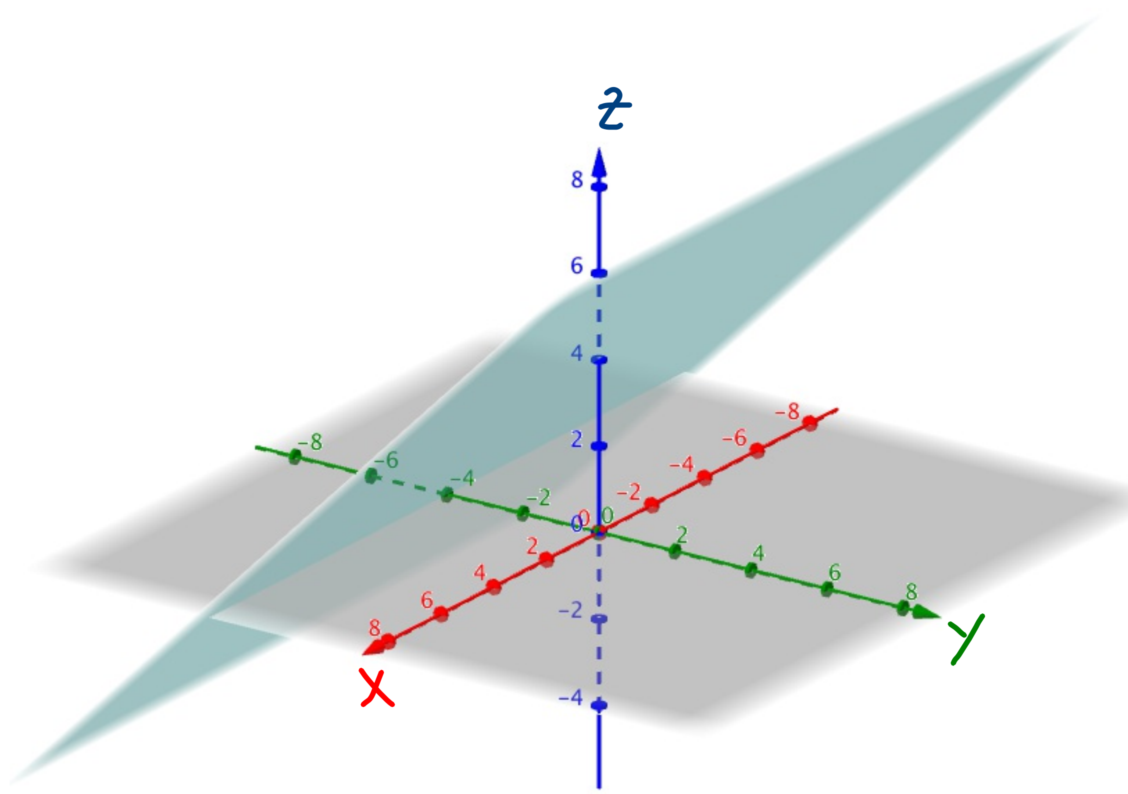
$\alpha // \beta$

c) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$, avec $k, n \in \mathbb{R}$ $\quad \beta : \begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$, avec $p, q \in \mathbb{R}$

$(\alpha) : \quad y + z - 4 = 0$

$(\beta) : \quad y + z - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha \equiv \beta$



$\alpha \parallel Ox$

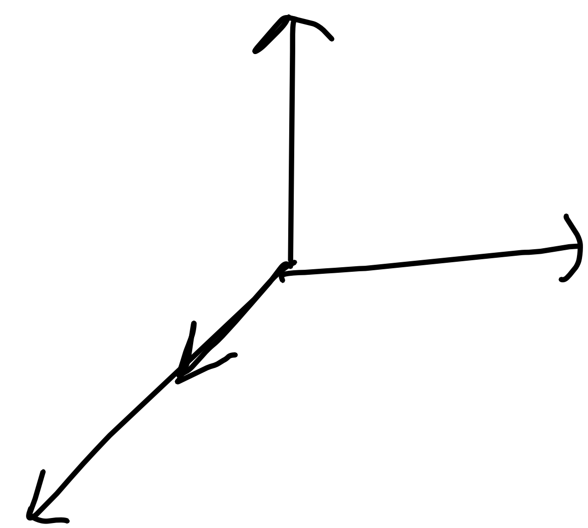
$y + z - 4 = 0$

$A\ (0, 1, 3)$

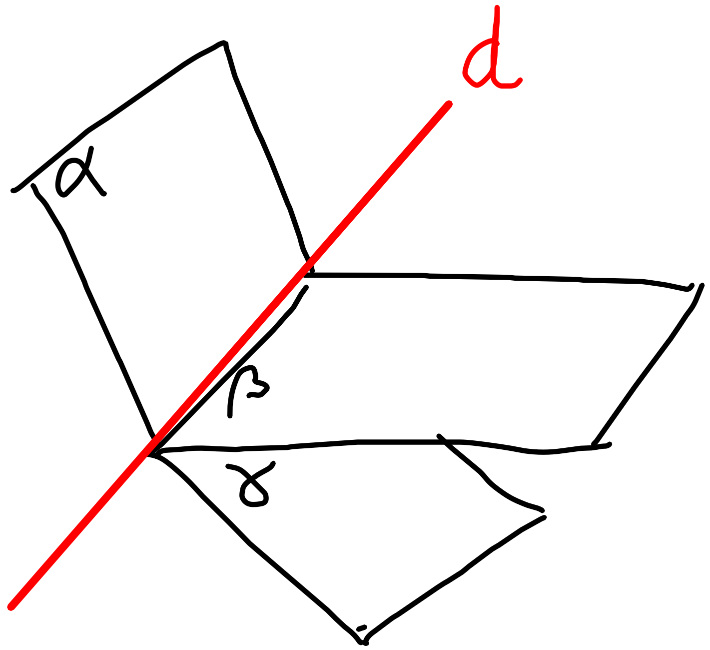
$B\ (4, 1, 3) \qquad n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

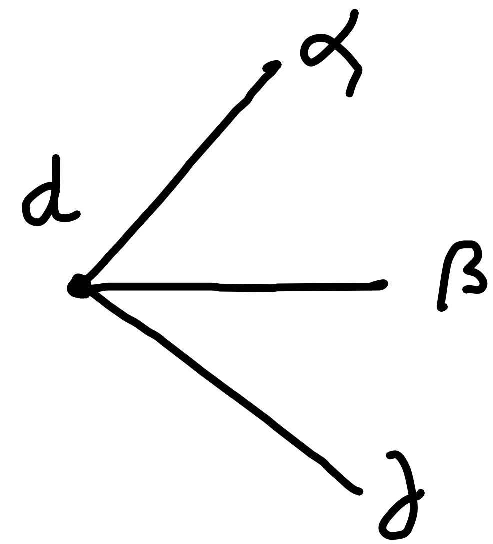
$C\ (5, 1, 3)$

$\overrightarrow{AB}$ u $\overrightarrow{BC}$ u $\overrightarrow{AC} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.





$$(d_1) : \begin{cases} 7x + 4y + 7z = -1 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$