09.02.21

Intégrations des fractions rationnelles

Soit $p(x)$ et $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, avec $\deg(p) < \deg(q)$

$\frac{p(x)}{q(x)}$ peut être décomposé de la façon suivante :

1) $\frac{A}{ax+b}$ où $A \in \mathbb{R}$ éléments simples d'ordre 1

2) si $(ax+b)$ apparaît n fois dans la décomposition de $q(x)$, alors ce facteur correspond à

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

3) Si $q(x)$ a un facteur de la forme ax^2+bx+c avec $b^2-4ac<0$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$ éléments simples d'ordre 2

4) Si $q(x)$ a un facteur de la forme ax^2+bx+c, avec $b^2-4ac<0$, qui apparaît n fois dans la décomposition, alors ce facteur correspond à

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

2.3.11 Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$

$q(x) = (x+1)^2 + 4 = x^2 + 2x + 5 \qquad \Delta < 0$

CRM $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

$x + 1 = u$

$dx = du$

$$= \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$

$q = \underbrace{x^2-4x}+8$ $\quad \Delta = 16-32 < 0$ $\quad$ élément simple d'ordre 2

$= (x-2)^2 + 4$

x^2-4x+4

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+29} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+25} = \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x+2}{5}\right) + c$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\underbrace{2x^2-3x+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{63}{16}}$

élém. sim d'ordre 2

$\Delta < 0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2 = (x-\frac{3}{4})^2 \\ (x-\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + \frac{9}{2} = (x-\frac{3}{4})^2 + \frac{63}{16} \\ \\ x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \end{array}\right]$$

$\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{4}^{2}}{\sqrt{63}} \arctan\left(\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{63}}{4}}\right) + C = \frac{2}{3\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4x-3}{3\sqrt{7}}\right) + c$

$\frac{2}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{21}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

CRM $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

moche

$4x - x^2 \rightarrow -x^2 + 4x - 4 \quad + 4$

$4 - (x-2)^2$

f) $\int \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}\,dx = \int dx + \int \frac{dx}{x^2-4x+5}$

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+6 & x^2-4x+5 \\ \cline{2-2} x^2-4x+5 & \quad 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$= x + \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = x + \arctan(x-2) + C$$

g) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx = -\int \frac{-2x-3}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$

$$(9-8x-x^2)' = -8-2x$$

$$= -\int \frac{-2x-8+5}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$$

$$= -\int \underbrace{(-2x-8)}_{u'}\underbrace{(9-8x-x^2)}_{u}^{-1/2}\,dx - 5\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x-x^2}}$$

$$= -2(9-8x-x^2)^{1/2} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{25-(x+4)^2}}$$

$$-(x^2+8x+16)$$

$$= -2\sqrt{9-8x-x^2} - 5\arcsin\left(\frac{x+4}{5}\right) + C$$

h) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+2} = \int \frac{dt}{(t+2)(t+1)}$

$$\left.\begin{aligned} t &= e^x \\ dt &= e^x\,dx \end{aligned}\right\} = \int \frac{-dt}{t+2} + \int \frac{dt}{t+1} =$$

$$\frac{1}{(t+2)(t+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1}$$

$$1 = A(t+1) + B(t+2)$$

$t = -1 \quad : \qquad 1 = B$

$t = -2 \quad : \qquad 1 = -A$

$$-\ln(t+2) + \ln(t+1) + c$$

$$= -\ln(e^x+2) + \ln(e^x+1) + c$$

$$= \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right) + C$$