09.09.20

1.1.11 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$

Résolution d'un système linéaire

On obtient un système équivalent (même solution) à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

1) On permute deux équations $L_i \leftrightarrow L_j$
2) On multiplie une équation par un nombre non nul $L_j \leftarrow \lambda L_j$
3) On additionne à une équation un multiple d'une autre

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

Méthode de Gauss

$$\begin{cases} 4x + 10y + 7z = 8 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_1 \qquad\qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 10 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 10 & 7 & 8 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

qui correspond au système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

09.09.20

1.1.12 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases}$

$(+7; 16; 13)$

$+7 + 32 - 39$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow \frac{-1}{13} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = +\frac{7}{13} K \\ y = \frac{16}{13} K \\ z = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} +7 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S = \{ (+7K; 16K; 13K) \mid K \in \mathbb{R} \}}$$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -2x+5y+2z=1 \\ 8x+y+4z=-1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} X = -1/7 - K\,3/7 \\ Y = 1/7 - K\,4/7 \\ z = K \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; 0\right) + K\left(3; 4, -7\right) \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}$$

1.1.13 Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

$$AX = B \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

1.1.15 Résoudre les systèmes suivants à l'aide d'un calcul d'inverse de matrice :

a) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + z = -2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 3 \\ 4x + 5y + 4z = 0 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 5 \\ 3x + 5y + z = 10 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$