1.4.8 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$

10.03.21

Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$, où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. On note $B = A^{-1}$.

<u>Théorème</u> $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ CRM

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} = A$ comme $\det(A) = 0$, A non inversible

$A = (a_{ij})$ telle que $\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\left((-1)^{i+j} D_{ij} \right)$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \cos^4(\alpha) - \sin^4(\alpha) \\ &= \underbrace{\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right)}_{1}\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) \\ &= 1 \qquad \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 5$

Matrice des cofacteurs

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^{t}}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{5A^{-1}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La 2ème méthode

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

g) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 20 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{5} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{15} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -8/5 & -4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -8/15 & 1 & 8/15 & 0 & -1/15 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \quad \text{etc} \ldots$$

$$A = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A_1}$$

$$\det(A_1) = 27 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 24 + 16 = 40$$

$$\left| 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right| = 2^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$$

$$|\lambda \underset{\substack{\cap \\ M_{n \times n}(\mathbb{R})}}{A}| = \lambda^n \det(A)$$

i)

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} m & 1 \\ 1 & m \\ 1 & 1 \end{matrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m$$

$$= m^3 - 3m + 2$$

$$p = m^3 - 3m + 2 \qquad p(1) = 0 \Rightarrow m-1 \,/\, p$$

$$p(-2) = 0 \Rightarrow m+2 \,/\, p$$

On divise 2 fois par Horner :

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

	1	1	-2
-2		-2	2
	1	-1	0

$$p = (m-1)(m+2)(m-1) = (m-1)^2(m+2)$$

A est inversible $\Leftrightarrow$ $m \neq 1$ et $m \neq -2$

Inversons cette matrice :

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = A^{-1}$$

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} m^2-1 & 1-m & 1-m \\ -(m-1) & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 1-m & m^2-1 \end{pmatrix}^t$$

1.4.11 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\mathcal{B}^\star = ((0;1;1);(1;0;1);(1;1;0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $F^\star$ de f relativement à $\mathcal{B}^\star$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "H_B^B", "H"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H_{B^*}^{B^*}", "H^*"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$$H^* = P^{-1} \cdot H \cdot P$$

pour le 17.03.21